3. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

4. Ч и к м а з я н А.В. Двойственная нормализация. - Докл. Арм. ССР, 1959, т. 128, №4, с. 151-157.

5. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. - Труды геометрич. семинара ВИНИТИ, М., 1966, т. I, с. 239-263.

6. В а с и л ь я н М.А. Об инвариантном оснащении гиперполосы. - Докл. АН Арм. ССР, 1970, т. 50, №2, с. 65-69.

7. А к и в и с М.А. Фокальные образы поверхности ранга r. - Известия вузов. Математика, 1957, №1, с. 9-19.

8. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. - Известия вузов. Математика, 1975, (в печати).

9. О л о н и ч е в П.М. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполос. - Докл. АН СССР, 1951, т. 180, №2, с. 165-168.

10. Casanova G. „La nation de pôle harmonique". Rev. math. spéc., 1955, t. 65, №6, s. 437-440.

О.С. Р е д о з у б о в а

О МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПАР Θ КОНГРУЭНЦИЙ

Проективные свойства пар Θ конгруэнций изучены в работах [1], [2]. Цель настоящей работы - изучение метрических свойств пар Θ.

§1. Общая характеристика пар Θ конгруэнций в E_3

О п р е д е л е н и е 1, 1. Пара прямолинейных конгруэнций $\{F_a, F'_a\} = \{\tau_a\}$, где F_a, F'_a - фокусы прямых τ_a этих конгруэнций, называется парой Θ, если: 1/ касательная плоскость поверхности (F_1) проходит через фокус F_2, касательная плоскость поверхности (F'_1) - через фокус F'_2; 2/ касательная плоскость фокальной поверхности (F_2) содержит точку F'_1, а касательная плоскость поверхности (F'_2) - точку F_1. Обе конгруэнции не являются параболическими ($a = 1, 2$).

С парой конгруэнций $\{\tau_a\}$ связана конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$. Пусть K_a - точки пересечения прямых τ с соответствующими прямыми τ_a. Отнесем конфигурацию к ортонормированному подвижному реперу $\{A, \vec{e}_\kappa\}$ ($\kappa = 1, 2, 3$), вершина A которого принадлежит прямой τ, а вектор $\vec{e}_3$ служит направляющим вектором этой прямой. Деривационные формулы репера $\{A, \vec{e}_\kappa\}$ имеют вид

$$dA = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i, j = 1, 2, 3), \qquad (1.1)$$

где формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства E_3

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i , \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \tag{1.2}$$

и тождествам

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 . \tag{1.3}$$

Обозначим координаты точек K_a относительно репера $\{A, \vec{e}_k\}$ на τ через h_a, углы, которые прямые τ_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ - через α_a, абсциссы фокусов F_a, F_a' по отношению к реперу $\{K_a, \vec{\eta}_a\}$ на прямой τ_a - через ρ_a, ρ_a' ; $\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a$ направляющий вектор прямой τ_a . Имеем

$$\vec{F}_a = \vec{A} + \vec{e}_1 \rho_a \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \rho_a \sin\alpha_a + \vec{e}_3 h_a ; \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} d\vec{F}_a = {} & \vec{e}_1\{\omega^1 - (\omega_1^2 + d\alpha_a)\rho_a \sin\alpha_a - \omega_1^3 h_a + d\rho_a \cos\alpha_a\} + \\ & + \vec{e}_2\{\omega^2 + (\omega_1^2 + d\alpha_a)\rho_a \cos\alpha_a - \omega_2^3 h_a + d\rho_a \sin\alpha_a\} + \\ & + \vec{e}_3\{\omega^3 + dh_a + \omega_1^3 \rho_a \cos\alpha_a + \omega_2^3 \sin\alpha_a\} . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Формулы, определяющие $\vec{F}_a'$ и $d\vec{F}_a'$, имеют аналогичный вид (с заменой ρ_a на ρ_a'). Из определения пар Θ следует :

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{dF}_1, \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F_1F_2}) = 0, \quad (\overrightarrow{dF}_1', \vec{\eta}_1, \overrightarrow{F_1'F_2'}) = 0, \\ & (\overrightarrow{dF}_2, \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F_2F_1'}) = 0, \quad (\overrightarrow{dF}_2', \vec{\eta}_2, \overrightarrow{F_2'F_1}) = 0 . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Обозначая

$$H_a = \frac{\omega^3 + dh_a}{h_1 - h_2}, \quad A_a = \frac{\omega_1^2 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_{a3} = \omega_1^3 \cos\alpha_a + \omega_2^3 \sin\alpha_a , \quad \Omega_{a3}^* = -\omega_1^3 \sin\alpha_a + \omega_2^3 \cos\alpha_a , \\ & \Omega_a = \omega^1 \cos\alpha_a + \omega^2 \sin\alpha_a , \quad \Omega_a^* = \omega^1 \sin\alpha_a - \omega^2 \cos\alpha_a , \\ & \Theta_a = \frac{\Omega_a^* + h_a \Omega_{a3}^*}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} , \end{aligned} \tag{1.7}$$

приведем уравнения (1.6) к виду

$$\begin{aligned} & A_1(\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2') + \Theta_1(\rho_2' - \rho_2) + \Omega_{13}\frac{\rho_2\rho_2'(\rho_1 - \rho_1')}{h_1 - h_2} = 0, \\ & H_1(\rho_1'\rho_2 - \rho_2'\rho_1) + \Theta_1(\rho_1' - \rho_1) + \Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2 - \rho_2')}{h_1 - h_2} = 0 , \\ & A_2(\rho_1'\rho_2' - \rho_1\rho_2) + \Theta_2(\rho_1 - \rho_1') + \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2 - \rho_2')}{h_1 - h_2} = 0 , \\ & H_2(\rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2') + \Theta_2(\rho_2 - \rho_2') + \Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_2'(\rho_1 - \rho_1')}{h_1 - h_2} = 0 . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Т е о р е м а 1.1. Существует четыре класса пар Θ : пары $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \Theta_4$ для которых соответственно

1) $\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' \neq 0$, $\rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2' \neq 0$; (1.9)

2) $\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' = 0$, $\rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2' \neq 0$: (1.10)

3) $\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' \neq 0$, $\rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2' = 0$; (1.11)

4) $\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' = 0$. $\rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2' = 0$. (1.12)

Пары Θ_1 определяются с произволом двух функций двух аргументов, пары Θ_2 и Θ_3 -с произволом одной функции двух аргументов и пары Θ_4 -с произволом четырех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Учитывая (1.9), приводим систему (1.8) к виду

$$A_1 = \Theta_1 \frac{\rho_2 - \rho_2'}{\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2'} - \Omega_{13}\frac{\rho_2\rho_2'(\rho_1 - \rho_1')}{(h_1 - h_2)(\rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2')} , \tag{1.13}$$

$$A_2=\Theta_2\frac{\rho_1-\rho_1'}{\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2'}+\Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2-\rho_2')}{(h_1-h_2)(\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2')},$$

$$H_1=\Theta_1\frac{\rho_1-\rho_2'}{\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2'}-\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2-\rho_2')}{(h_1-h_2)(\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2')}, \qquad (1.13)$$

$$H_2=\Theta_2\frac{\rho_2-\rho_2'}{\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2'}-\Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_2'(\rho_1-\rho_1')}{(h_1-h_2)(\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2')}.$$

Замыкая систему (1.13), убеждаемся, что полученная замкнутая система в инволюции и определяет пары Θ_1 с произволом двух функций двух аргументов.

2/Из (1.10) следует, что для пар Θ_2 имеет место прямая пропорциональная зависимость абсцисс фокусов $\rho_1:\rho_2=\rho_1':\rho_2'$. Учитывая (1.10), систему (1.8) приводим к виду

$$\Theta_1=\Omega_{13}\frac{\rho_1'\rho_2}{h_1-h_2}, \qquad \Theta_2=A_2\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{\rho_1}-\Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_1'}{h_1-h_2},$$

$$H_1=A_1\frac{\rho_1}{\rho_2}-\Omega_{13}\frac{\rho_1+\rho_1'}{h_1-h_2}, \quad H_2=-A_2\frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (1.14)$$

Ее замыкание имеет вид:

$$(A_1\wedge\Omega_{13})\left\{\rho_1'(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2))+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_2)\right\}+$$

$$+(A_1\wedge\Omega_{23})\left\{2\rho_1'\rho_2+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1)\right\}-$$

$$-(A_1\wedge A_2)\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\rho_1}+(A_2\wedge\Omega_{13})\frac{\rho_1'\rho_2(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2))}{\rho_1}+$$

$$+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}-(\rho_2\,d\rho_1'+\rho_1'\,d\rho_2)\wedge\Omega_{13}=0,$$

$$(A_1\wedge A_2)(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2))+(d\rho_2\wedge A_2)-(d\rho_1\wedge A_2)\frac{\rho_2}{\rho_1}+$$

$$+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{\rho_2-\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}=0,$$

$$-(A_2\wedge\Omega_{13})\left\{\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)+2\rho_1'\rho_2\right\}+ \qquad (1.15)$$

$$+(A_2\wedge\Omega_{23})\left\{-\frac{\rho_1'\rho_2}{\rho_1}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2))+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1+\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2))\right\}+$$

$$+(A_1\wedge\Omega_{23})\rho_1'(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1)+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\left\{\frac{\rho_1'\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{h_1-h_2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right\}-(d\rho_2\wedge A_2)\frac{(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{\rho_1}-(d\rho_1'\wedge A_2)\frac{\rho_2(h_1-h_2)}{\rho_1}-$$

$$-(d\rho_1\wedge A_2)\left\{\frac{\rho_2(h_1-h_2)}{\rho_1}-\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')(h_1-h_2)}{(\rho_1)^2}\right\}+(\rho_1'\,d\rho_2+\rho_2\,d\rho_1')\wedge\Omega_{23}=0,$$

$$(A_1\wedge\Omega_{13})\frac{\rho_1+\rho_1'}{\rho_2}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1)-(A_1\wedge\Omega_{23})(\rho_1+\rho_1')-(A_2\wedge\Omega_{13})\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{\rho_1}+$$

$$+(A_1\wedge A_2)\frac{h_1-h_2}{\rho_2}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2))-(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{h_1-h_2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+\rho_1)-$$

$$-(d\rho_1\wedge A_1)\frac{h_1-h_2}{\rho_2}+(d\rho_2\wedge A_1)\frac{\rho_1(h_1-h_2)}{(\rho_2)^2}+(d\rho_1+d\rho_1')\wedge\Omega_{13}=0.$$

Из (1.14),(1.15) следует, что

$$s_1 = 4\,,\quad s_2 = 1\,,\quad Q = N = 6\,.$$

Система (1.14),(1.15)-в инволюции и определяет пары Θ_1 с произволом одной функции двух аргументов.

3/Из (1.11) следует, что для пар Θ_3 абсциссы фокусов обратно пропорциональны: $\rho_1 : \rho_1' = \rho_2' : \rho_2$.

В силу (1.11) система (1.8) приводится к виду

$$H_1 = -A_1 \frac{\rho_1'}{\rho_2}\,,\quad H_2 = A_2 \frac{\rho_2}{\rho_1'} - \Omega_{23} \frac{\rho_2(\rho_1+\rho_1')}{\rho_1'(h_1-h_2)}\,,$$

$$\Theta_1 = A_1(\rho_1+\rho_1') - \Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,,\quad \Theta_2 = \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,. \tag{1.16}$$

Замыкая (1.16), убеждаемся, что пары Θ_3 определяются с произволом одной функции двух аргументов.

4/Наконец, для пар Θ_4 соотношения (1.12) приводятся к виду

$$\rho_1' = -\rho_1\,,\quad \rho_2' = -\rho_2\,. \tag{1.17}$$

Здесь прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые пары Θ_4 в их центрах. Замкнутая система уравнений, определяющая пары Θ_4, имеет вид :

$$H_1 = A_1\frac{\rho_1}{\rho_2}\,,\qquad H_2 = -A_2\frac{\rho_2}{\rho_1}\,,$$

$$\Theta_1 = -\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,,\qquad \Theta_2 = \Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\,. \tag{1.18}$$

$$(d\rho_2\wedge A_1)\frac{\rho_1}{\rho_2} - (d\rho_1\wedge A_1) + (A_1\wedge A_2)(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) -$$

$$-(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{\rho_1+\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)} = 0\,,$$

$$(d\rho_2\wedge A_2) - (d\rho_1\wedge A_2)\frac{\rho_2}{\rho_1} + (A_1\wedge A_2)(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)) +$$

$$+(\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\frac{\rho_2-\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)} = 0\,,$$

$$(A_1\wedge\Omega_{13})\Big\{\rho_1(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1) + \frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_2)\Big\} - \tag{1.19}$$

$$-(A_2\wedge\Omega_{13})\rho_2(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) + (A_1\wedge\Omega_{23})\Big\{-2\rho_1\rho_2 +$$

$$+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)-\rho_1) + (\rho_2 d\rho_1 + \rho_1 d\rho_2)\wedge\Omega_{13} = 0\,,$$

$$(A_1\wedge\Omega_{23})\rho_1(\rho_1-\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)) + (A_2\wedge\Omega_{23})\Big\{\rho_2(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) +$$

$$+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_1+\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)) - (A_2\wedge\Omega_{13})\Big\{2\rho_1\rho_2 +$$

$$+\frac{(h_1-h_2)^2}{\rho_1\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}(\rho_2+\rho_1\cos(\alpha_1-\alpha_2)) - (\rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1)\wedge\Omega_{23} = 0\,.$$

Имеем $\quad s_1 = 4\,,\ s_2 = 0\,,\quad Q = N = 4\,.$

Система (1.18),(1.19)- в иноволюции и определяет пары Θ_4 с произволом четырех функций одного аргумента. Теорема доказана.

§2. Геометрические свойства пар θ

Для выяснения геометрической характеристики пар θ_2, θ_3 и θ_4 отнесем их к новому каноническому реперу – трехграннику Гишара [3, с.73] , вершина которого находится в центре прямой τ конгруэнции общих перпендикуляров, а векторы $\vec{e}_a$ помещены в биссекторных плоскостях фокальных плоскостей конгруэнции $\{\tau\}$. Тогда

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\, ctg\varphi \cdot \omega_2^3, \quad \omega^2 = -\hat{\rho}\, tg\varphi \cdot \omega_1^3, \qquad (2.1)$$

где $2\hat{\rho}$ и 2φ соответственно есть фокальное расстояние и угол между фокальными плоскостями конгруэнции $\{\tau\}$. Подставляя (2.1) в первое уравнение системы (1.14) и учитывая независимость форм ω_1^3, ω_2^3, получим систему уравнений

$$\frac{h_1}{\sin 2\alpha_1} = \frac{\hat{\rho}}{\sin 2\varphi}, \quad \frac{\rho_1' \rho_2}{h_1 - h_2} = \frac{8d \sin(\varphi - \alpha_1) \sin(\varphi + \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

где $2d = \frac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi}$ – расстояние между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров $\{\tau\}$; $\varphi - \alpha_1, \varphi + \alpha_1$ – углы, которые образует прямая τ_1 с фокальными плоскостями этой конгруэнции $\{\tau\}$. Полученные условия являются необходимыми для пар θ_2. Аналогичным геометрическим свойством обладают и пары θ_3. Из последних двух уравнений системы (1.18), используя трехгранник Гишара, получим уравнения

$$h_1 - h_2 = 2d \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$h_1 + h_2 = 2d \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \qquad (2.2)$$

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos 2\varphi,$$
$$\rho_1 \rho_2 = 2d \cdot \frac{h_1 - h_2}{2} \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2). \qquad (2.3)$$

Анализируя систему уравнений (2.2), (2.3) и учитывая, что $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ есть ассиметрия пары θ_4, а $\frac{h_1 + h_2}{2}$ – эксцентриситет, приходим к следующим теоремам:

Т е о р е м а 2.1. Расстояние между соответствующими прямыми пары θ_4 равно произведению синуса угла между этими прямыми, расстояния между граничными точками прямых конгруэнции общих перпендикуляров и косинуса двойной ассиметрии.

Т е о р е м а 2.2. Отношение двойного эксцентриситета пар θ_4 к синусу двойной ассиметрии равно произведению расстояния между граничными точками прямых конгруэнции общих перпендикуляров и косинуса угла между соответствующими прямыми пары.

Т е о р е м а 2.3. Косинус угла между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров пар θ_4 равен произведению косинуса угла между соответствующими прямыми и косинуса двойной ассиметрии.

Т е о р е м а 2.4. Произведение абсцисс фокусов прямых τ_a пары θ_4 равно произведению расстояния между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров, половины расстояния между соответствующими прямыми и синуса двойной ассиметрии.

Т е о р е м а 2.5. Пары θ_4 конгруэнций характеризуются тем свойством, что у них расстояния между соответствующими прямыми пар дополнительных конгруэнций (F_1F_2), $(F_1'F_2')$ и (F_2F_1'), $(F_2'F_1)$ равны между собой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для пар Θ_4 и только для них имеем

$$\rho\{(F_1F_2),(F_1'F_2')\}=\rho\{(F_2F_1'),(F_2'F_1)\}=$$

$$\frac{(\rho_1-\rho_1')(\rho_2-\rho_2')\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(\rho_1-\rho_1')^2+(\rho_2-\rho_2')^2-2(\rho_1-\rho_1')(\rho_2-\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)}}.$$

§3. Некоторые классы пар Θ конгруэнций

О п р е д е л е н и е 3.1. Пара Θ называется ортогональной, если угол между прямыми τ_1 и τ_2 – прямой, т.е.

$$\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi}{2}. \tag{3.1}$$

Из определения ортогональной пары следует, что

$$A_1=A_2. \tag{3.2}$$

Т е о р е м а 3.1. Ортогональные пары Θ_1 существуют с произволом одной функции двух аргументов, ортогональные пары Θ_2, Θ_3 – с произволом четырех функций одного аргумента. Не существует ортогональных пар Θ_4.

Докажем, например, последнее утверждение теоремы. Учитывая (1.18), (3.1), (3.2), приводим первое и второе уравнения (1.19) к виду

$$(d\rho_2\wedge A_1)\rho_1-(d\rho_1\wedge A_1)\rho_2=0,\quad (\Omega_{13}\wedge\Omega_{23})\rho_1\rho_2=0,$$

откуда следует, что $\rho_1\rho_2=0$, чего быть не может.

Т е о р е м а 3.2. Для того чтобы у ортогональных пар Θ_1 углы между соответствующими прямыми пар дополнительных конгруэнций были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекали в центрах одну из конгруэнций пары.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство углов между соответствующими прямыми (F_1F_2), $(F_1'F_2')$ и (F_2F_1'), (F_1F_2') дополнительных конгруэнций приводит к уравнению

$$\frac{\rho_1\rho_1'+\rho_2\rho_2'+(h_1-h_2)^2-(\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(\rho_1)^2+(\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}\sqrt{(\rho_1')^2+(\rho_2')^2-2\rho_1'\rho_2'\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}}=$$

$$=\frac{\rho_1\rho_1'+\rho_2\rho_2'+(h_1-h_2)^2-(\rho_1\rho_2-\rho_1'\rho_2')\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(\rho_1)^2+(\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2'\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}\sqrt{(\rho_1')^2+(\rho_2)^2-2\rho_1'\rho_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)^2}}. \tag{3.3}$$

Используя (3.1), приводим уравнение (3.3) к виду

$$\{(\rho_2)^2-(\rho_2')^2\}\{(\rho_1')^2-(\rho_1)^2\}=0,$$

откуда следует, что либо $\rho_1'=-\rho_1$, либо $\rho_2'=-\rho_2$ (3.4)

Наоборот, если пара Θ_1 ортогональна и имеет место одно из условий (3.4), то равны углы между соответствующими прямыми пар дополнительных конгруэнций.

Легко показать, что ортогональные пары Θ_1 с равными углами между соответствующими прямыми пар дополнительных конгруэнций существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

О п р е д е л е н и е 3.2. Парой Θ' называется пара Θ_1, у которой постоянен угол между соответствующими прямыми и расстояние между ними.

Т е о р е м а 3.3. Пары Θ' определяются с произволом четырех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения (3.2) следует, что для пар Θ' справедливы соотношения

$$A_1 = A_2 \equiv A, \qquad H_1 = H_2 \equiv H. \tag{3.5}$$

Уравнения (1.8) в этом случае приводятся к виду

$$H = \frac{-\tau_2 g \Omega_{13} + \varrho \tau_1 \Omega_{23}}{(h_1 - h_2)\delta}, \quad A = \frac{\varrho \tau_2 \Omega_{13} + \tau_1 g \Omega_{23}}{(h_1 - h_2)\delta}, \tag{3.6}$$

$$\Theta_1 = \frac{\Omega_{13}\tau_1\tau_2\mu + \Omega_{23}\varrho^2}{(h_1 - h_2)\delta}, \quad \Theta_2 = \frac{\Omega_{13}g^2 - \Omega_{23}\tau_1\tau_2\mu}{(h_1 - h_2)\delta}, \tag{3.7}$$

$\mu = \rho_1\rho_1' + \rho_2\rho_2'$, $\varrho = \rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2'$, $g = \rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2'$, $\tau_a = \rho_a - \rho_a'$, $\delta = (\tau_1)^2 + (\tau_2)^2$.

Замыкая систему (3.6), (3.7) и исследуя полученную замкнутую систему, убеждаемся в справедливости теоремы.

Заметим, что в случае постоянного расстояния между соответствующими прямыми пары Θ эти прямые лежат в касательных плоскостях двух параллельных поверхностей.

Т е о р е м а 3.4. Для того чтобы пара Θ' была ортогональной, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция общих перпендикуляров была либо нормальной, либо изотропной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отнесем пару Θ' к трехграннику Гишара (см. §2). Используя уравнения (3.7), получим

$$2d \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos 2\varphi - (h_1 - h_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \tag{3.8}$$

Если пара Θ' ортогональна, то (3.8) приводится к виду

$$2d \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\cos 2\varphi = 0, \tag{3.9}$$

откуда следует, что либо $2d = 0$, либо $\cos 2\varphi = 0$. Если $2d = 0$, то конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$ – изотропная, если $\cos 2\varphi = 0$, то конгруэнция $\{\tau\}$ – нормальная. Наоборот, если у пары Θ' конгруэнция $\{\tau\}$ изотропная или нормальная, то из (3.8) вытекает ортогональность пары Θ'.

Т е о р е м а 3.5. Если пара Θ' не ортогональная, то фокальное расстояние конгруэнции общих перпендикуляров так относится к расстоянию между соответствующими прямыми, как котангенсы углов между этими прямыми и между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в уравнение (3.8)

$$2d = \frac{2\hat{\varrho}}{\sin 2\varphi}, \tag{3.10}$$

получим

$$\frac{2\hat{\varrho}}{\sin 2\varphi} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{ctg} 2\varphi}, \tag{3.11}$$

откуда непосредственно следует теорема.

Список литературы

1. К а р а п е т я н С.Е. Конгруэнция Θ Попова – "Сб. науч. тр. Ереванского гос. пед. ин-та", 1955, №5, с. 189-214.

2. Ф и н и к о в С.П., Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956, 457с.

3. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. М.-Л., ГИТТЛ, 1950, 528 с.