УДК 512.6

***А. Я. Султанов*[1], *Г. А. Султанова*[2]**

***М. В. Глебова*[3], *О. А. Монахова*[4]**
[1, 4] Пензенский государственный университет, Россия
[2] Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулева Министерства обороны РФ, Пенза, Россия
[3] Пензенский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Россия
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
[3] mvmorgun@mail.ru, [4] oxmonakh@mail.ru
[1] SPIN-код: 7105-6226, AuthorID: 561203
[2] SPIN-код: 2503-5253, AuthorID: 846241
[3] SPIN-код: 1464-0816, AuthorID: 729264
[4] SPIN-код: 5397-3423, AuthorID: 387556
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-9

О некоторых типах почти йордановых алгебр

В настоящей работе вводятся понятия йордановой и почти йордановой алгебр над произвольным полем. Приведены примеры некоторых йордановых алгебр. Отмечено, что класс почти йордановых алгебр шире, чем класс йордановых алгебр. Доказано существование различных типов почти йордановых алгебр над произвольным полем, отличных от йордановых алгебр. В частности, на векторном пространстве построена алгебра $A(\alpha, \beta, \theta)$ линейной формы θ и двух скаляров α и β, умножение в которой задается специальным условием. Доказаны некоторые свойства алгебры $A(\alpha, \beta, \theta)$. Получено условие эластичности этой алгебры. Показано, что рассматриваемая алгебра является почти йордановой алгеброй.

Поступила в редакцию 15.04.2026 г.
© Султанов А. Я., Султанова Г. А., Глебова М. В., Монахова О. А., 2026

Среди множества всех почти йордановых алгебр $A(\alpha, \beta, \theta)$ выделены классы коммутативных алгебр Йордана и алгебр Йордана с антикоммутативным умножением, а также доказаны некоторые их свойства. Получено условие равенства почти йордановой алгебры алгебре Ли.

Ключевые слова: йорданова алгебра, почти йорданова алгебра, почти йорданова алгебра над произвольным полем, алгебра Ли

Введение

Йордановы алгебры возникли в 1933 г. в работе немецкого физика и математика П. Йордана (1902—1980), посвященной аксиоматизации основ квантовой механики [1]. Первоначально такие алгебры назывались *r*-системами счисления, но в 1946 г. американский математик А. Альберт (1905—1972) переименовал их в йордановы алгебры и начал систематическое изучение общих йордановых алгебр.

Йордановы алгебры остаются важным математическим объектом и находят применение в различных областях математики, таких как группы и алгебры Ли [2], алгебраическая геометрия [3], математическая статистика, дифференциальные уравнения, вещественный и комплексный анализ, а также в физике и статистической механике [4].

Исследованию свойств йордановых алгебр посвящены работы А. Я. Султанова. В статье [5] доказаны некоторые свойства йордановых алгебр. В статье А. А. Попова рассмотрены дифференциально-простые йордановы алгебры [6]. Специальные йордановы алгебры изучались А. М. Слинько [7], Е. И. Зельмановым и В. Г. Скосырским [8].

Наряду с йордановыми алгебрами рассматриваются почти йордановы алгебры, которые являются расширением класса йордановых алгебр. Исследованию почти конечномерных йордановых алгебр посвящены работы В. Н. Желябина и А. С. Панасенко [9; 10].

1. Основные определения и факты

Определение 1. Векторное пространство V над полем P, на котором задана билинейная операция умножения $(x, y) \mapsto xy$ для любых $x, y \in V$, называется *алгеброй Йордана* (иначе *йордановой алгеброй*), если введенная операция удовлетворяет следующим аксиомам [1]:

(1) $xy = yx$,

(2) $x^2(yx) = (x^2y)x$

для любых $x, y \in V$.

Приведем примеры йордановых алгебр.

Пример 1. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем P, характеристика которого отлична от 2. На A зададим новую операцию умножения $\cdot$ по формуле

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Полученная линейная алгебра обозначается символом A^+. В алгебре A^+ выполнены тождества (1) и (2). Следовательно, алгебра A^+ является йордановой алгеброй. Такую алгебру называют *специальной йордановой алгеброй*. Йорданова алгебра, не являющаяся специальной, называется *исключительной йордановой алгеброй*.

Пример 2. Предположим, что на векторном пространстве V над полем P задана симметрическая билинейная форма f, то есть f является отображением $V \times V$ в поле P, удовлетворяющим условиям:

1) $f(x, y) = f(y, x)$,

2) $f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x, z) + \mu f(y, z)$

для всех $x, y, z \in V$ (см.: [11]).

На прямом произведении $P \times V$ возникает естественная структура векторного пространства над полем P. На этом векторном пространстве зададим операцию умножения по формуле

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta + f(x, y), \alpha y + \beta x),$$

где $\alpha, \beta \in P$; $x, y \in V$. Получим в результате йорданову алгебру.

Замечание. Построенные примеры йордановых алгебр обладают единицами. Это свойство имеет место не для всех йордановых алгебр.

2. Почти йордановы алгебры

Определение 2. Векторное пространство V, на котором задана операция умножения, удовлетворяющая условию (аксиоме Йордана)

$$x^2(yx) = (x^2y)x$$

для всех $x, y \in V$, называется почти *йордановой алгеброй* (см.: [9]).

Исключение в определении 1 аксиомы коммутативности существенно расширяет класс почти йордановых алгебр.

Действительно, если на векторном пространстве V задана антикоммутативная операция умножения, то есть умножение, удовлетворяющее тождеству $xy = -yx$, и характеристика поля P не равна 2, то алгебра будет почти йордановой. Любая альтернативная алгебра является почти йордановой.

3. Алгебры, операции умножения в которых задаются с помощью двух фиксированных элементов поля и линейной формы

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем P; α, β — фиксированные элементы поля P; θ — линейная форма, заданная на векторном пространстве V со значением в поле P.

На векторном пространстве V зададим операцию умножения условием

$$xy = \alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x \qquad (1)$$

для всех $x, y \in V$ (см.: [5]).

Легко показать, что операция умножения, определенная формулой (1), является билинейной. Следовательно, векторное

пространство V с операцией умножения (1) является линейной алгеброй. Эту алгебру можно назвать *алгеброй линейной формы θ и скаляров α и β*. Обозначим эту алгебру символом $A(\alpha, \beta, \theta)$. Изучим свойства алгебры A.

Из определения операции умножения, то есть из формулы (1), следует, что $x^2 = (\alpha + \beta)\theta(x)x$ для любого $x \in A$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *В алгебре A с операцией умножения (1) выполняется тождество*

$$x(yx) = (xy)x. \tag{2}$$

Доказательство. На основании определения операции умножения (1) преобразуем ассоциатор $x(yx) - (xy) = (x, y, x)$:

$$\begin{aligned}(x, y, x) &= x(\alpha\theta(y)x + \beta\theta(x)y) - (\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x)x = \\ &= \alpha\theta(y)x^2 + \beta\theta(x)(xy) - \alpha\theta(x)(yx) - \beta\theta(y)x^2 = \\ &= (\alpha - \beta)\theta(y)(\alpha + \beta)\theta(x)x + \beta\theta(x)(\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x) - \\ &- \alpha\theta(x)(\alpha\theta(y)x + \beta\theta(x)y) = 0.\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана. В связи с этой теоремой отметим, что алгебра, в которой имеет место тождество (2), называется *эластичной*, а само тождество (2) называется *тождеством эластичности* (см.: [12]).

Опираясь на теорему 1, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *В $A(\alpha, \beta, \theta)$ — алгебре с операцией умножения (1) выполняется тождество Йордана*

$$(x^2y)x = x^2(yx).$$

Доказательство. Для произвольных $x, y \in A(\alpha, \beta, \theta)$ имеем

$$\begin{aligned}&(x^2y)x - x^2(yx) = \\ &= (\alpha + \beta)\theta(x)(xy)x - (\alpha + \beta)\theta(x)x(yx) = \\ &= (\alpha + \beta)\theta(x)((xy)x - x(yx)) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, алгебра $A(\alpha, \beta, \theta)$ является почти йордановой.

4. Некоторые типы почти йордановых алгебр

Рассмотрим частные случаи йордановых алгебр.

Случай 1. В алгебре $A(\alpha,\beta,\theta)$ выделим алгебры условием $[x,y]=0$. Полученная алгебра является коммутативной алгеброй Йордана. Условие $[x,y]=0$ равносильно условию

$$0 = xy = yx = \alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x = \alpha\theta(y)x - \beta\theta(x)y = \\ = (\alpha-\beta)(\theta(x)y - \theta(y)x).$$

Если $\alpha=\beta$, то $[x,y]=0$ и $\dim_P V \geq 2$. Поскольку θ — ненулевая линейная форма, то $Ker\theta \neq 0$. Из условия $\dim_P V \geq 2$ следует, что существуют элементы $a,b \neq 0 \in A$ такие, что $\theta(b)=0$, $\theta(a)\neq 0$. Поэтому равенство $[\alpha,\beta]=0$ влечет за собой равенство

$$0 = (\alpha-\beta)(\theta(a)b - \theta(b)a) = (\alpha-\beta)\theta(a).$$

Отсюда $\alpha-\beta=0$. Тем самым доказана

Теорема 3. *Алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ коммутативна тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta$ и $\dim_P V \geq 2$.*

В коммутативной алгебре $A(\alpha,\beta,\theta)$ выберем базис $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ с элементом e_1, удовлетворяющим условию

$$\alpha\theta(e_1)=1, \qquad e_k \in Ker\theta \ \ (k=2,3,\dots,n).$$

Поскольку $xy=\alpha\theta(x)y+\alpha\theta(y)x$, то $e_1e_1=2e_1$, $e_1e_k = \\ = \alpha\theta(e_1)e_k = e_k$; аналогично $e_ke_1=e_k$, $e_ke_m=0$ $(k,m = \\ = 2,3,\dots,n)$. Таким образом, доказана

Теорема 4. *Каждая коммутативная алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ при $\alpha\neq 0$ и $\theta\neq 0$ изоморфна алгебре A с базисом $(e_1,e_2,\dots,e_n)$, элементы которой удовлетворяют соотношениям*

$$e_1e_1=2e_1,\ e_1e_k=e_ke_1=e_n,\\ e_ke_m=0\ \ (k,m=2,3,,\dots,n).$$

Перейдем к алгебрам с антикоммутативным умножением.

Случай 2. Пусть в алгебре $A(\alpha,\beta,\theta)$ выполняется тождество $xy=-yx$.

Тогда

$$xy = \alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x,$$
$$yx = \alpha\theta(y)x + \beta\theta(x)y.$$

В силу антикоммутативности операции умножения $xy + yx = 0$, поэтому

$$0 = (\alpha + \beta)\theta(x)y + (\alpha + \beta)\theta(y)x.$$

Таким образом,

$$(\alpha + \beta)(\theta(x)y + \theta(y)x) = 0.$$

Предположим, что линейная форма $\theta \neq 0$ и $\dim_P V \geq 2$. Тогда существуют элементы $a \neq 0$ и $b \neq 0$ такие, что $\theta(a) \neq 0$, $\theta(b) \neq 0$. Поэтому будет выполняться равенство

$$(\alpha + \beta)(\theta(a)b + \theta(b)a) = 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$(\alpha + \beta)\theta(a)b = 0.$$

Следовательно, $\alpha + \beta = 0$.

Обратное утверждение о том, что равенство $\alpha + \beta = 0$ влечет антикоммутативность операции умножения, то есть $xy = -yx$, является очевидным. Тем самым доказана

Теорема 5. *Операция умножения в алгебре $A(\alpha, \beta, \theta)$ антикоммутативна тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta = 0$.*

Таким образом, операция умножения в алгебре $A(\alpha, -\alpha, \theta)$ задается формулой

$$xy = \alpha\theta(x)y - \alpha\theta(y)x = r(x)y - r(y)x,$$

где $r(x) = \alpha\theta(x)$.

Покажем, что эта операция умножения удовлетворяет тождеству Якоби. Для этого проведем прямые вычисления в выражении

$$x(yz) + y(zx) + z(xy).$$

Вычислим отдельно каждое слагаемое:

$$x(yz) = \eta(x)(yz) - \eta(yz)x =$$
$$= \eta(x)(\eta(y)z - \eta(z)y) - \eta(\eta(y)z - \eta(z)y)x =$$
$$= \eta(x)\eta(y)z - \eta(x)\eta(z)y - \eta(y)\eta(z)x + \eta(y)\eta(z)x =$$
$$= \eta(x)\eta(y)z - \eta(x)\eta(z)y;$$
$$y(zx) = \eta(y)(zx) - \eta(zx)y =$$
$$= \eta(y)(\eta(z)x - \eta(x)z) - \eta(\eta(z)x - \eta(x)z)y =$$
$$= \eta(y)\eta(z)x - \eta(y)\eta(x)z - (\eta(x)\eta(z) - \eta(x)\eta(z)) =$$
$$= \eta(y)\eta(z)x - \eta(x)\eta(y)z,$$
$$z(xy) = \eta(z)(\eta(x)y - \eta(y)x) - \eta(\eta(x)y - \eta(y)x) =$$
$$= \eta(z)\eta(x)y - \eta(y)\eta(z)x.$$

Найдем сумму этих выражений:

$$x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0.$$

Мы доказали, что имеет место

Теорема 6. *Почти йорданова алгебра A, операция умножения в которой задается условием*

$$xy = \eta(x)y - \eta(y)x,$$

является алгеброй Ли.

В этой алгебре размерности ≥ 2 существует базис, относительно которого операция умножения базисных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будет иметь вид:

$$e_1 e_k = e_k, \qquad e_k e_1 = -e_k,$$
$$e_k e_m = 0 \ \ (k, m = 2, \ldots n).$$

Случай 3. Выясним существование среди алгебр $A(\alpha, \beta, \theta)$ ассоциативных алгебр. Рассмотрим ассоциатор

$$(x, y, z) = x(yz) - (xy)z:$$
$$x(yz) - (xy)z = x(\alpha\theta(y)z + \beta\theta(z)y) - (\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x)z =$$
$$= \alpha\theta(y)(\alpha\theta(x)z + \theta(z)x) + \beta\theta(z)(\alpha\theta(x)y + \beta\theta(y)x) -$$
$$-\alpha\theta(x)(\alpha\theta(y)z + \beta\theta(z)y) - \beta\theta(y)(\alpha\theta(x)z + \beta\theta(z)x) =$$
$$= \alpha^2\theta(y)\theta(x)z + \alpha\beta\theta(y)\theta(z)x + \alpha\beta\theta(x)\theta(z)y +$$

$$+\beta^2\theta(y)\theta(z)x-\alpha^2\theta(x)\theta(y)z-\alpha\beta\theta(x)\theta(z)y-$$
$$-\alpha\beta\theta(x)\theta(y)z-\beta^2\theta(y)\theta(z)x=$$
$$=\alpha\beta\theta(z)(\theta(y)x-\theta(x)y)+$$
$$+2\beta\theta(x)(\theta(z)y-\theta(y)z)=$$
$$=\alpha\beta\theta(y)(\theta(z)x-\theta(x)z).$$

Отсюда следует, что если $\alpha\beta=0$, то $(x,y,z)=0$.

Пусть $(x,y,z)=0$ для всех $x,y,z\in A$. Тогда при $\dim_P A\geq 2$ существуют элементы $a=b\neq 0$, $a\notin Ker\theta$, $c\in Ker\theta$ такие, что

$$(a,a,b)=\alpha\beta\theta(a)(\theta(c)a-\theta(a)c)=-\alpha\beta\theta(a).$$

Отсюда в силу равенства $(a,a,c)=0$ имеем $\alpha\beta=0$. Таким образом, алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда $\alpha\neq 0,\beta=0$ либо $\alpha=0,\ \beta\neq 0$. Случай $\alpha=\beta=0$ приводит к алгебре с нулевым умножением. Учитывая полученные равенства, можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 7. *Каждая ассоциативная почти йорданова алгебра $A(\alpha,\beta,\theta)$ изоморфна одной из следующих алгебр с таблицами умножения:*

$$e_1e_i=e_i\ \ (i=1,2,\dots,n);$$
$$e_ie_1=e_i\ \ (i=1,2,\dots,n).$$

Кроме перечисленных алгебр специального типа остается серия алгебр почти йордановых, в которых операция умножения задается формулой

$$xy=\alpha\theta(x)y+\beta\theta(y)x.$$

Список литературы

1. *Jordan P.* Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Klasse. Ausg. 41. Berlin, 1933. S. 209—217.

2. *Gavioli N., Monti V., Scoppola C. M.* Just infinite periodic Lie algebras // Finite groups 2003 : Proc. Gainesville conf. on finite groups in honour of J. Thompson to his 70th birthday. Berlin, 2004. P. 73—85.

3. *Старикова О. А.* Нормальный вид и классы проективно конгруэнтных симметричных матриц // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2019. № 3. С. 27—33.

4. *Эмх Ж.* Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М., 1976.

5. *Султанов А. Я., Глебова М. В.* Об алгебре Ли дифференцирований йордановой алгебры билинейной симметрической формы // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 222. С. 94—99. doi: 10.36535/0233-6723-2023-222-94-99.

6. *Попов А. А.* Дифференциально простые йордановы алгебры // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 4. С. 890—901.

7. *Слинько А. М.* О специальных многообразиях йордановых алгебр // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 3. С. 337—344.

8. *Зельманов Е. И., Скосырский В. Г.* Специальные йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 6. С. 626—635.

9. *Желябин В. Н., Панасенко А. С.* Почти конечномерные йордановы алгебры // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 5. С. 522—546.

10. *Панасенко А. С.* Йордановы алгебры: классическая теория. Новосибирск, 2024.

11. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1 : Основы алгебры. М., 2002.

12. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. М.* Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978.

Для цитирования: *Султанов А. Я., Султанова Г. А., Глебова М. В., Монахова О. А.* О некоторых типах почти йордановых алгебр // ДГМФ. 2026. № 57 (2). С. 87—98. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-9.

ПРЕДСТАВЛЕНО ДЛЯ ВОЗМОЖНОЙ ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ В СООТВЕТСТВИИ С УСЛОВИЯМИ ЛИЦЕНЗИИ CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)

MSC 17C50

A.Ya. Sultanov[1], G.A. Sultanova[2]
M.V. Glebova[3], O.A. Monakhova[4]
[1, 4] Penza State University,
37 Lermontova Str., Penza, 440026, Russia
[2] Logistic Military Educational Institution named after general A.V. Khrulov
of the Ministry of Defence of the Russian Federation,
125 Military Town, Penza-5, Russia
[3] Financial University under the Government of the Russian Federation, Penza branch,
33b, Kalinina Str., Penza, Russia
[1] sultanovaya@rambler.ru, [2] sultgaliya@yandex.ru
[3] mvmorgun@mail.ru, [4] oxmonakh@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-2-9

On some types of almost Jordan algebras

Submitted on April 15, 2026

In this paper, we introduce the concepts of Jordan and almost Jordan algebras over an arbitrary field. Examples of some Jordan algebras are given. It is noted that the class of almost Jordan algebras is wider than the class of Jordan algebras. The existence of various types of almost Jordan algebras over an arbitrary field, distinct from Jordan algebras, is proved. In the paper, in particular, an algebra $A(\alpha, \beta, \theta)$ of a linear form θ and two scalars α and β is constructed on a vector space, the multiplication in which is specified by a special condition. In the work, some properties of the algebra $A(\alpha, \beta, \theta)$ are proved. A condition for the elasticity of this algebra is obtained. It is shown that the algebra under consideration is an almost Jordan algebra.

Among the set of all almost Jordan algebras $A(\alpha, \beta, \theta)$, classes of commutative Jordan algebras and Jordan algebras with anticommutative multiplication are distinguished, and some of their properties are proved. In the article, a condition is obtained for when an almost Jordan algebra is a Lie algebra.

Keywords: Jordan algebra, almost Jordan algebra, almost Jordan algebra over an arbitrary field, Lie algebra

References

1. *Jordan, P.:* Ueber Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik. Nachr. Akad. Wiss. Göottingen. Math. Phys. Kl., 41, 209—217 (1933).

2. *Gavioli, N., Monti, V., Scoppola, C.M.:* Just infinite periodic Lie algebras. Finite groups 2003. Proc. Gainesville conf. on finite groups in honour of J. Thompson to his 70th birthday, Berlin, 73—85 (2004).

3. *Starikova, O.A.:* Normal form and classes of projectively congruent symmetric matrices. Izvestia Vuzov. North Caucasus Region. Natural Sci., 3, 27—33 (2019).

4. *Emkh, J.:* Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory. Moscow (1976).

5. *Sultanov, A.Ya., Glebova, M.V.:* On the Lie algebra of differentiations of the Jordan algebra of a bilinear symmetric form. Itogi Nauki i Techn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 222, 94—99 (2023). doi: 10.36535/0233-6723-2023-222-94-99.

6. *Popov, A.A.:* Differentially simple Jordan algebras. Siberian Math. J., **54**:4, 890—901 (2013).

7. *Slinko, A.M.:* On special varieties of Jordan algebras. Math. Notes, **26**:3, 337—344 (1979).

8. *Zel'manov, E.I., Skosyrskii, V.G.:* Special Jordan nil-algebras of bounded index. Algebra and Logic, **22**:6, 626—635 (1983).

9. *Zhelyabin, V.N., Panasenko, A.S.:* Almost finite-dimensional Jordan algebras. Algebra and Logic, **57**:5, 522—546 (2018).

10. *Panasenko A.S.:* Jordan algebras: classical theory. Novosibirsk (2024).

11. *Kostrikin, A.I.:* Introduction to algebra. Part I. Fundamentals of algebra. Moscow (2002).

12. *Zhevlakov, K.A., Slinko, A.M., Shestakov, I.P., Shirshov A.M.:* Rings close to associative. Moscow (1978).

For citation: Sultanov, A.Ya., Sultanova, G.A., Glebova, M.V., Monakhova, O.A.: On some types of almost Jordan algebras. DGMF, **57**:2, 87—98 (2026). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2026-57-2-9.

SUBMITTED FOR POSSIBLE OPEN ACCESS PUBLICATION UNDER THE TERMS AND CONDITIONS OF THE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION (CC BY) LICENSE (HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY/4.0/)