УДК 514.75

КОМПЛЕКСЫ КОНИК В P_3 С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ОСНАЩАЮЩИМ МНОГООБРАЗИЕМ

В. С. Малаховский

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается трехпараметрическое семейство (комплекс) **K** невырождающихся кривых второго порядка . С каждой коникой **C** $\in$**K** инвариантно ассоциируется точка **B** , не лежащая в плоскости коники [1] . Исследуются комплексы **K** с вырождающимся в двумерную поверхность оснащающим многообразием (B), описанным этими инвариантными точками .

1. Отнесём комплекс **K** реперу $\{\bar{A}_0 , \bar{A}_1 , \bar{A}_2 , \bar{A}_3\}$, в котором вершины A_i (i,j,k=1,2,3) расположены в плоскости коники **C** $\in$**K** , а вершина A_0 - вне её . Тогда уравнения коники **C** запишутся в виде :

$$a_{ij}x^i x^j = 0 \ , \ x^0 = 0 \ , \qquad (1.1)$$

причём коэффициенты a_{ij} симметричны по нижним индексам и пронормированы так , что

$$\det(a_{ij}) = 1 \ . \qquad (1.2)$$

Обозначим через a^{ij} приведённые миноры элементов a_{ij} матрицы (a_{ij}) . Тогда

$$a^{jk} a_{ki} = \delta^j_i \ . \qquad (1.3)$$

Система уравнений Пфаффа комплекса **K** запишется в виде :

$$\theta_{ij} = b^k_{ij}\omega_k \ , \qquad (1.4)$$

где

$$\theta_{ij} \overset{\text{def}}{=} da_{ij} - a_{kj}\omega^k_i - a_{ik}\omega^k_j + \tfrac{2}{3}a_{ij}\omega^k_k \ , \ \omega_i \overset{\text{def}}{=} \omega^0_i \ , \ b^k_{ij} = b^k_{ji} \ . \qquad (1.5)$$

Дифференцируя (1.3) , получим :

$$a^{ij}\, b^k_{ij} = 0 \ . \qquad (1.6)$$

Система величин

$$b^i = a^{ik}\, b^j_{kj} \qquad (1.7)$$

образует квазитензор , так как

$$db^i = -b^k\omega^i_k + b^i\omega^0_0 + \tfrac{10}{3}\omega^i_0 + b^{ik}\omega_k \ . \qquad (1.8)$$

Он определяет в пространстве P_3 инвариантную точку

$$\overline{B}=-0{,}3\ b^i\ \overline{A}_i+\overline{A}_0\ , \tag{1.9}$$

не лежащую в плоскости коники .

Определение 1. Оснащающим многообразием комплекса **K** называется многообразие , описанное инвариантными точками **B** .

Имеем :

$$d\overline{B}=\omega_0^0\,\overline{B}+b^{ik}\omega_k\,\overline{A}_i\ . \tag{1.10}$$

Обозначим :

$$\theta^i=b^{ik}\omega_k\ ,\ r=\mathrm{rang}(b^{ij})\ . \tag{1.11}$$

Если r=3 , то оснащающее многообразие (B) - трехмерная область пространства P_3 . Если же 0<r<3 , то оно вырождается в двумерную поверхность или линию .

2. Определение 2. Комплексом K_2 называется комплекс **K** с двумерным оснащающим многообразием (B) .

Совместим вершину A_0 репера с инвариантной точкой B, вершины A_1 и A_2 - с точками пересечения касательной плоскости α к поверхности (B) с коникой **C** , а вершину A_3 расположим в полюсе прямой A_1A_2 относительно **C .** При такой канонизации исключается из рассмотрения случай , когда плоскость α касается коники **C .** Имеем

$$\overline{B}=\overline{A}_0\ ,\ b^i=0\ ,\ a_{33}=-1\ ,\ a_{12}=1\ ,\ a_{11}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=0\ ,\ \theta^i=\omega_0^i\ , \tag{2.1}$$

$$\omega_0^3=0\ ,\ \omega_{\hat{i}}^3=c_{\hat{i}\hat{k}}\,\omega_0^{\hat{k}}\ . \tag{2.2}$$

Здесь и в дальнейшем $\hat{i},\hat{j},\hat{k}=1{,}2$; $\hat{i}\neq\hat{j}$ и по индексам $\hat{i},\hat{j}$ суммирование не производится .

Система уравнений Пфаффа комплекса K_2 состоит из уравнений (2.2) и уравнений :

$$\begin{cases} 2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=3b_{12}^k\omega_k\ ,\ \omega_{\hat{i}}^{\hat{j}}=-\frac{1}{2}b_{\hat{i}\hat{i}}^k\omega_k\ , \\ \omega_{\hat{i}}^3-\omega^{\hat{j}}=b_{\hat{i}3}^k\omega_k\ ,\ \ \omega_0^{\hat{i}}=m^{\hat{i}k}\omega_k\ , \end{cases} \tag{2.3}$$

причём :

$$b_{33}^k=2b_{12}^k\ ,\ b_{ik}^k=0\ . \tag{2.4}$$

Анализируя систему (2.2) , (2.3) с учётом соотношений (2.4) , убеждаемся, что она - в инволюции и определяет комплексы K_2 с произволом трёх функций трёх аргументов .

3. Общие точки двух смежных коник комплекса K_2 определяются системой уравнений :

$$2x^1x^2-(x^3)^2=0\ ,\ x^0=0\ ,\ x^k\omega_k=0\ ,\ \varphi^k\omega_k=0\ , \qquad (3.1)$$

где

$$\begin{cases}\varphi^{\$}=b^{\$}_{\$3}x^{\$}x^3+b^{\$}_{j3}x^{j}x^3+3b^{\$}_{\$\$}x^{\$}x^{j}+\frac{1}{2}(b^{\$}_{ff}(x^{\$})^2+b^{\$}_{jj}(x^{j})^2)\ ,\\ \varphi^3=b^3_{13}x^1x^3+b^3_{23}x^2x^3+3b^3_{12}x^1x^2+\frac{1}{2}(b^3_{11}(x^1)^2+b^3_{22}(x^2)^2)\ .\end{cases} \qquad (3.2)$$

Всякая инвариантная неголономная конгруэнция коник $\mathbf{C}\in K_2$ задаётся одним линейным однородным уравнением

$$\Omega\equiv a^k\omega_k=0\ , \qquad (3.3)$$

где $\mathbf{\Omega}$ - относительно инвариантная форма ($\delta\Omega=\lambda\Omega$, δ - символ дифференцирования по вторичным параметрам) . Фокальные точки такой конгруэнции определяются системой :

$$2x^1x^2-(x^3)^2=0\ ,\ x^0=0\ ,\ \begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ \varphi^1 & \varphi^2 & \varphi^3\\ x^1 & x^2 & x^3\end{vmatrix}=0\ . \qquad (3.4)$$

Так как репер $\{A_\alpha\}$ геометрически фиксирован , то формы Пфаффа ω_i , $\omega^{\$}_0$ - относительно инвариантные . Они определяют в общем случае пять неголономных конгруэнций , ассоциированных с комплексом K_2 .

Если

$$m^{12}=m^{13}=m^{21}=m^{23}=0\ , \qquad (3.5)$$

то неголономные конгруэнции $\omega^{\$}_0$=0 и $\omega_{\$}$=0 ($\$$=1,2) совпадают .Такие комплексы коник определяются с произволом восьми функций двух аргументов .

4. Основной трижды ковариантный тензор [1]

$$b_{ijk}=a_{h(i}b^h_{jk)}-\tfrac{2}{5}b_{(i}a_{jk)} \qquad (4.1)$$

в силу (2.1) приводится к виду :

$$\begin{cases}b_{\$\$\$}=3b^{\$}_{\$\$}\ ,b_{333}=\text{-}3b^3_{33}\ ,\ b_{\$\$j}=2b^{\$}_{\$j}+b^{j}_{\$\$}\ ,\\ b_{\$33}=b^{\$}_{33}-2b^3_{3\$}\ ,\ b_{\$\$3}=2b^{\$}_{\$3}\ \text{-}\ b^3_{\$\$}\ ,\ b_{123}=b^2_{32}+b^1_{31}-b^3_{12}\ .\end{cases} \qquad (4.2)$$

Ассоциированное **t**-фокальное многообразие коники $\mathbf{C}\in K_2$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases}2x^1x^2-(x^3)^2=0\ ,\ x^0=0\ ,\ 3b^2_{11}(x^1)^3+3b^1_{22}(x^2)^3-3b^1_{33}(x^3)^3+\\ +2(2b^2_{12}+b^1_{11})(x^1)^2x^2+2(2b^1_{21}+b^2_{22})(x^2)^2x^1+2(b^2_{33}-2b^3_{31})x^1(x^3)^2+\\ +2(b^1_{33}-2b^3_{32})x^2(x^3)^2+(2b^2_{13}-b^3_{11})(x^1)^2x^3+(2b^1_{23}-b^3_{22})(x^2)^2x^3+\\ +3(b^2_{32}+b^1_{31}-b^3_{12})x^1x^2x^3=0\ .\end{cases} \qquad (4.3)$$

Оно состоит в общем случае из шести **t**-фокальных точек коники **C**. Каждая такая точка характерезуется тем , что она является фокусом неголономных конгруэнций коник , соответствующих всем точкам касательных к конике в точке M_t [2] .

Условие $b^2_{11}=0$ ($b^1_{22}=0$) характеризует комплексы K_2 , в которых точка A_1 (A_2) является t-фокальной точкой коники **C** .

5. Рассмотрим комплекс K_2 с неопределённым **t**-фокальным многообразием . Назовём его комплексом K^0_2 . Он характеризуется тождественным обращением в нуль основного трижды ковариантного тензора b_{ijk} , т.е. соотношениями :

$$\begin{cases} b^{\hat{j}}_{\hat{i}\hat{i}}=0\,,\ 2b^{\hat{j}}_{\hat{i}\hat{j}}+b^{\hat{i}}_{\hat{i}\hat{i}}=0\,, b^{\hat{j}}_{33}-2b^{3}_{3\hat{i}}=0\,, \\ b^{3}_{33}=0\,,\ 2b^{\hat{j}}_{\hat{i}3}-b^{3}_{\hat{i}\hat{i}}=0\,,\ b^{1}_{31}+b^{2}_{32}-b^{3}_{12}=0\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Система уравнений (2.3) в силу (2.4) и (5.1) приводится к виду :

$$\begin{cases} 2\omega^3_3-\omega^1_1-\omega^2_2=3b^{\hat{k}}_{12}\omega_{\hat{k}}\,,\ \omega^{\hat{j}}_{\hat{i}}=b^{\hat{j}}_{\hat{i}\hat{j}}\omega_{\hat{i}}-b^{\hat{j}}_{\hat{i}3}\omega_3\,, \\ \omega^3_{\hat{i}}-\omega^{\hat{j}}_3=b^{\hat{i}}_{\hat{i}3}\omega_{\hat{i}}+b^{\hat{j}}_{\hat{i}3}\omega+b^{\hat{j}}_{\hat{i}\hat{j}}\omega_3\,,\ \ \omega^{\hat{i}}_0=m^{\hat{i}k}\omega_k\,, \end{cases} \tag{5.2}$$

причём $b^1_{13}+b^2_{23}=0$.

Система (5.2) определяет комплексы K^0_2 с произволом одной функции двух аргументов .

Библиографический список

1. Малаховский В.С. Поля геометрических объектов на многообразии квадратичных элементов // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград , 1995. Вып. 26. С. 59-65.

2. Малаховский В.С. Комплексы кривых второго порядка в трёхмерном проективном пространстве // Литовский мат. сб. 1963. Т.3. №2. С. 254-255.

3. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М. , 1969. Т.2. С. 179-206.

V.S. M a l a k h o v s k y

COMPLEXES OF CONICS IN P_3 WITH A DEGENERATE EQUIPPING MANIFOLD

Three-parameter family (complex**)** K of nondegenerate conics is considered in three-dimensional projective space P_3 . A point B , not lying in the conic plane, is in cariantly associated with each conic C∈ K . Comlexes K with a degenerate in two-dimensional

surface equipping manifold (B), formed by these invariant points (complexes K_2) are investigated. Such complexes are defined with arbitrariness of three functions of three arguments. Subclasses of complexes K_2 are studied with special properties of associated geometric forms.