УДК 514.75

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ ТОЧКИ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Б.А. А н д р е е в

(Калининградский государственный университет)

В работе показано, что регулярное гиперполосное распределение в n-мерном проективно-аффинном пространстве порождает несколько семейств точечных отображений проективно-аффинных пространств. Это приводит к появлению структур теории точечных соответствий [1], [2] в геометрии гиперполосных распределений [3]. В частности, введен ряд новых понятий и геометрических образов, обобщающих характеристические направления и главные точки точечных соответствий. Доказаны предложения, в которых дана геометрическая характеристика введенных понятий. Применяемые в работе индексы принимают следующие значения:

$\bar{J},\ldots=\overline{0,n};\quad J,\ldots=\overline{1,n};\quad i,\ldots=\overline{0,m};\quad u,\ldots=\overline{m+1,n-1};\quad a,\ldots=\overline{1,n-1};$

$\alpha,\ldots=\overline{m+1,n};\quad \nu=\overline{0,4}.$

Символ (a, b) [c] указывает на формулу (a, b) статьи [c].

В работе [3] определено регулярное гиперполосное распределение H в n-мерном проективном пространстве P_n, состоящее из пары распределений $x\in U\subset P_n\to\Pi_{n-1}$ и $x\in U\subset P_n\to\Pi_m$, где U -область в P_n, а Π_{n-1}, Π_m – содержащие точку x подпространства пространства P_n размерностей n-1 и m< n-1, причем $\Pi_m\subset\Pi_{n-1}$. В репере 1-го порядка [3, с.122] дифференциальные уравнения распределения H согласно (1.16) [3] имеют вид:

$$\omega_i^n=\Lambda_{ik}^n\omega_0^k,\quad \omega_i^\nu=M_{ik}^\nu\omega_0^k,\quad \omega_\nu^n=A_{\nu\alpha}^n\omega_0^\alpha,\quad \omega_\nu^i=N_{\nu k}^i\omega_0^k, \qquad (1)$$

где $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ – компоненты инфинитезимальных перемещений подвижного репера $\{A_{\bar{J}}\}$ пространства P_n, в котором $A_0 = x$.

Фиксация в P_n такой гиперплоскости P_{n-1}, что $P_{n-1}\cap U=\varnothing$, в качестве несобственной гиперплоскости превращает P_n в проективно-аффинное пространство [4, с.483]. Поместив в P_{n-1} вершины A_J репера, имеем: $\omega_J^0\equiv 0$. При этом точки A_J образуют подвижный репер проективного пространства P_{n-1}; пусть P_{n-1}^* – двойственное ему пространство, а P_{n-1}^* – реализация последнего как пространство всех (n-2)-плоскостей в P_{n-1}.

Определим на множестве всех подпространств $\Lambda\subset P_n$ отображение σ: $\Lambda\to\Lambda\cap P_{n-1}$, т.е. $\sigma(\Lambda)$ состоит из несобственных точек этого подпространства. Пусть отображение α: $x\in U\to\Pi_{n-1}$ задается распределением H и $f=\sigma\cdot\alpha$. Отображение f: $x \in \mathrm{U} \subset P_n \to f(x) \in P^*_{n-1}$ является локальным отображением проективных пространств. Таким образом, оно относится к объектам изучения теории точечных отображений [1], [2], что приводит к появлению структур этой теории в геометрии гиперполосных распределений.

В [5] получено и геометрически охарактеризовано поле $x \to L$ нормалей 1-го рода L гиперполосного распределения $x \to \Pi_{n-1}$. Репер, в котором для каждого $x \in \mathrm{U}$ выполняется $A_n = \sigma(L)$ обозначим R_L; в этом репере, как вытекает из (2.18), (2.20) [5], выполняется: $\Lambda^n_{an} = 0$, а уравнения нормали L принимают вид $x^a = 0$.

Фундаментальный объект 2-го порядка определяет для каждой точки $A_0 \in \mathrm{U}$ инвариантные алгебраические многообразия J_0 и J_1:

$$F_i \equiv \Lambda^n_{iJK} x^J x^K - 2\Lambda^n_{ia} x^a = 0, \qquad \Phi_v \equiv A^n_{vJK} x^J x^K - 2A^n_{vu} x^u = 0, \tag{2}$$

$$\Lambda^n_{ijk} x^j x^k - 2\Lambda^n_{ij} x^j = 0, \quad x^v = 0, \quad x^n = 0, \tag{3}$$

где $A^n_{vjJ} = -\Lambda^n_{ij} N^i_{vJ}$, а также алгебраические многообразия J_2, J_3, J_4, задаваемые соответственно системами:

а) $F_i = 0$; б) $F_i = 0$, $x^n = 0$; в) $F_i = 0$, $\Phi_v = 0$, $x^n = 0$. Для каждого $\nu = \overline{0,4}$ имеем: $A_0 \in J_\nu$; в общем случае J_ν является алгебраическим многообразием размерности 1, 0, $n - m$, $n - m - 1$, 0 и порядка 2^a, 2^m, 2^m, 2^m, 2^a соответственно. Для выяснения геометрической характеристики многообразий J_ν рассмотрим соответствующую точке A_0 прямую L и точку $\sigma(L) = A_n$, которая определяет в P^*_{n-1} структуру проективно-аффинного пространства A^*_{n-1}, т.е. задает в ней несобственную $(n - 2)$-плоскость P^*_{n-2}, которая реализуется в P^*_{n-1} как множество $(n - 2)$-плоскостей, инцидентных точке $\sigma(L)$. Пусть $A_{n-1} = P^*_{n-1} \setminus \sigma(L)$ и (a_i, a_v) – неоднородные тангенциальные координаты точки $\xi \in A_{n-1}$. Рассмотрим аффинное отображение π: $A_{n-1} \to A_{n-1}$, определяемое формулой $\pi(\xi) = (a_i, a_v)$, где $a_v = 0$. Пусть Π_{n-m-1} – характеристика гиперплоскости Π_{n-1}[3, с.123]. Легко доказывается

Предложение 1. Геометрически отображение π характеризуется как проекция в A_{n-1} вдоль подпространства $N^* \subset A_{n-1}$ на подпространство $\mathrm{Jm}\pi$, причем N^* и $\mathrm{Im}\pi$ реализуются в P^*_{n-1} как множества всех неинцидентных точке $\sigma(L)$ $(n - 2)$-плоскостей, содержащих все точки $(m - 1)$-плоскости $\sigma(\Pi_m)$ и все точки $(n - m - 2)$-плоскости $\sigma(\Pi_{n-m-1})$ соответственно.

Пусть V – алгебраическое многообразие в P_n и $A_0 \in V$. Обозначим символом [V] множество прямых связки $\{A_0\}$, пересекающих V в двух точках, или касающихся его в точке A_0.

Определение 1. Прямые множества $\chi_\nu = [J_\nu]$ называются f_ν-характеристическими прямыми распределения H, а задаваемые ими в A_0 направления – f_ν-характеристическими направлениями распределения H.

Предложение 2. f_v-характеристические направления распределения являются характеристическими направлениями отображения f_v, где $f_0 = f$, $f_1 = \pi \cdot f\big|_{\Pi_m}$, $f_2 = \pi \cdot f$, $f_3 = \pi \cdot f\big|_{\Pi_{n-1}}$, $f_4 = f\big|_{\Pi_{n-1}}$. Это означает, что направление, задаваемое в точке A_0 некоторым вектором, является f_v-характеристическим направлением распределения H в том и только том случае, если для любой кривой l в области определения отображения f_v, задающей в A_0 это направление и имеющей в A_0 инфлексионную точку, кривая $f_v \cdot l$ имеет в $f_v(A_0)$ инфлексионную точку или точку остановки.

Доказательство этого предложения проводится так же, как доказательство теорем 1 [6] и 4.1 [7].

Из предложения 2 вытекает, что в общем случае в данной точке имеется 1-параметрическое ((n – m)-параметрическое, (n – m – 1)-параметрическое) семейство f_0-характеристических (f_2-, f_3-характеристических) прямых, $2^m - 1$ f_1-характеристических и $2^a - 1$ f_4-характеристических прямых распределения H.

Определение 2. Отличная от точки A_0 точка B многообразия J_v называется f_v-главной относительно точки A_0 точкой распределения H, если число общих точек прямой $[A_0 B]$ и многообразия J_v равно 2.

Рассуждая как при доказательстве предложения 1 [6], получаем

Предложение 3. Точка B является f_v-главной относительно A_0 точкой распределения H в том и только том случае, если существует касательная к отображению f_v коллинеация K [1], для которой прямая $[A_0 B]$ является главной [1], причем $K(B) \in P^*_{n-2}$.

Следствие. На каждой прямой, определяющей f_v-характеристическое направление в точке A_0, существует единственная f_v-главная точка относительно точки A_0.

Если f_v-главная точка B не лежит в P_{n-1}, то можно говорить о f_v-главном векторе $\overline{A_0B}$. Если f_v-главная точка B несобственная, то $[A_0B]$ является главной прямой для касательного к отображению f_v линейного отображения.

Библиографический список

1. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия 1963. Итоги науки /ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

2. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Алгебра, топология, геометрия 1970. Итоги науки /ВИНИТИ. М., 1971. С.153-174.

3. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения // Проблемы геометрии /ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

4. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

5. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве //Тр. геом. семинара /ВИНИТИ. М., 1973. Т.5. С.169-193.

6. *Андреев Б.А.* О распределении линейных элементов, порожденных отображением f: $P_m \to A_n$ (m>n) //Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1979. Вып. 10. С.5-9.

7. *Андреев Б.А.* Структуры теории точечных соответствий в геометрии гиперполос //Там же, 1996. Вып.27. С. 9-16.

B. A. A n d r e e v

CHARACTERISTIC DIRECTIONS AND PRINCIPAL
OF A HYPERSTIP DISTRIBUTIONS

It is shown that a regular hyperstrip distribution in the n-dimensional projective-affine space generates some families of point maps of projective-affine spaces. This fact leads to the appearance of structures of the theory of point correspondences in the geometry of hyperstrip distributions. In particular, a number of new notions and geometric images are introduced, which generalize characteristic directions and principal points of point correspondences. Some theorems are proved, which demonstrate a geometric interpretation of the introduced notions and relations between them.

УДК 514.763.8

О ГОЛОМОРФНОЙ БИСЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЕ 6 - МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

М. Б. Б а н а р у

(Смоленский государственный педагогический институт)

Голоморфная бисекционная кривизна является одной из важнейших характеристик почти эрмитова многообразия, поскольку она во многом определяет не только его геометрию, но и топологию. Напомним, что понятие голоморфной бисекционной кривизны многообразия ввели С.Гольдберг и Ш.Кобаяси [1], а под почти эрмитовым понимают многообразие M^{2n}, наделенное почти комплексной структурой J и римановой метрикой $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$, при выполнении условия $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, X,Y∈ ($M^{2n}$). Если при этом еще выполняется условие

$$[X,Y]+J[JX,Y]+J[X,JY]-[JX,JY]=0,$$

то многообразие называют эрмитовым.