УДК 514.75

К. В. Полякова

КОВАРИАНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрена m-мерная поверхность в n-мерном проективном пространстве; найдены тождества Бианки при изучении фундаментально-групповой связности. Доказано, что альтернированные ковариантные производные компонент объекта связности 1-го типа равны соответствующим компонентам тензора кривизны, а 3-го типа — нулю.

The paper is concerned with m-dimensional surface in n-dimensional projective space. In studying fundamental-group connection Bianchi identities are found. It is proved that alternated covariant derivatives for the components of the first type connection object are equal to the corresponding components of the curvature tensor, and the ones of the third type vanish.

Ключевые слова: связность, кривизна, ковариантный дифференциал, ковариантные производные, тождества Бианки.

Key words: connection, curvature, covariant differential, covariant derivatives, Bianchi identities.

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-поверхность X_m $(1 \leqslant m < n)$ с уравнениями

$$\omega^a = 0,\ \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j\ \ (i,\ldots = 1,\ldots, m;\ a,\ldots = m{+}1,\ldots, n),$$

где Λ_{ij}^a — фундаментальный тензор поверхности, симметрический по нижним индексам. С учетом уравнений поверхности деривационные формулы подвижного репера $R = \{A, A_i, A_a\}$ принимают вид

$$dA = \theta A + \omega^i A_i,\ dA_i = \theta A_i + \omega_i A + \omega_i^j A_j + \Lambda_{ij}^a \omega^j A_a,\ dA_a = \theta A_a + \omega_a A + \omega_a^i A_i + \omega_a^b A_b,$$

причем уравнения [1]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i,\ d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij},$$

$$d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a,\ d\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i,\ d\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b \quad (1)$$

$$(\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j,\ \omega_{ij} = \Lambda_{ij}^a\ \omega_a,\ \omega_{bi}^a = -\Lambda_{ij}^a\ \omega_b^j - \delta_b^a\ \omega_i,\ \omega_{aj}^i = -\delta_j^i\ \omega_a)$$

являются уравнениями главного расслоения $G(X_m)$, ассоциированного с поверхностью.

Связность в главном расслоении $G(X_m)$ задается способом Лаптева — Лумисте с помощью формы $\tilde{\omega} = \omega - \Gamma_i \omega^i$, где $\omega = \{\omega_j^i, \omega_i, \omega_b^a, \omega_a^i, \omega_a\}$ — слоевая форма. Компоненты объекта фундаментально-групповой связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i,\ \Gamma_{ij}, \Gamma_{bi}^a,\ \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai}\}$ удовлетворяют уравнениям [1] с тензорным оператором Δ:

$$\Delta\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jkl}\ \omega^l,\ \Delta\Gamma_{ij}+\Gamma^k_{ij}\omega_k+\omega_{ij}=\Gamma_{ijk}\ \omega^k,\ \Delta\Gamma^a_{bi}+\omega^a_{bi}=\Gamma^a_{bij}\ \omega^j,$$

$$\Delta\Gamma^i_{aj}+\Gamma^b_{aj}\omega^i_b-\Gamma^i_{kj}\omega^k_a+\omega^i_{aj}=\Gamma^i_{ajk}\ \omega^k,\ \Delta\Gamma_{ai}+\Gamma^j_{ai}\omega_j+\Gamma^b_{ai}\omega_b-\Gamma_{ji}\omega^j_a=\Gamma_{aij}\ \omega^j. \quad (2)$$

Структурные уравнения на компоненты формы связности $\tilde\omega$ имеют вид

$$d\tilde\omega^i_j=\tilde\omega^k_j\wedge\tilde\omega^i_k+R^i_{jkl}\ \omega^k\wedge\omega^l,\ d\tilde\omega_i=\tilde\omega^j_i\wedge\tilde\omega_j+R_{ijk}\ \omega^j\wedge\omega^k,$$

$$d\tilde\omega^a_b=\tilde\omega^c_b\wedge\tilde\omega^a_c+R^a_{bij}\ \omega^i\wedge\omega^j, \quad (3)$$

$$d\tilde\omega^i_a=\tilde\omega^j_a\wedge\tilde\omega^i_j+\tilde\omega^b_a\wedge\tilde\omega^i_b+R^i_{ajk}\ \omega^j\wedge\omega^k,\ d\tilde\omega_a=\tilde\omega^i_a\wedge\tilde\omega_i+\tilde\omega^b_a\wedge\tilde\omega_b+R_{aij}\ \omega^i\wedge\omega^j.$$

Компоненты тензора кривизны $R=\{R^i_{jkl},\ R_{ijk},\ R^a_{bij},\ R^i_{ajk},\ R_{aij}\}$ связности Γ выражаются по формулам [1, 2] с альтернированиями

$$R^i_{jkl}=\Gamma^i_{j[kl]}-\Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]},\ R_{ijk}=\Gamma_{i[jk]}-\Gamma^l_{i[j}\Gamma_{|l|k]},\ R^a_{bij}=\Gamma^a_{b[ij]}-\Gamma^c_{b[i}\Gamma^a_{|c|j]},$$

$$R^i_{ajk}=\Gamma^i_{a[jk]}-\Gamma^l_{a[j}\Gamma^i_{|l|k]}-\Gamma^b_{a[j}\Gamma^i_{|b|k]},\ R_{aij}=\Gamma_{a[ij]}-\Gamma^k_{a[i}\Gamma_{|k|j]}-\Gamma^b_{a[i}\Gamma_{|b|j]}$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\Delta R^i_{jkl}=R^i_{jkls}\omega^s,\ \Delta R_{ijk}+R^l_{ijk}\omega_l=R_{ijkl}\omega^l,\ \Delta R^a_{bij}=R^a_{bijk}\omega^k,$$

$$\Delta R^i_{ajk}+R^b_{ajk}\omega^i_b-R^i_{ljk}\omega^l_a=R^i_{jkl}\omega^l,\ \Delta R_{aij}+R^k_{aij}\omega_k+R^b_{aij}\omega_b-R_{kij}\omega^k_a=R_{aijk}\omega^k. \quad (4)$$

Внося в уравнения (4) компоненты формы связности $\tilde\omega$, получим

$$\nabla R^i_{jkl}=\omega^s\nabla_s R^i_{jkl},\ \nabla R_{ijk}=\omega^l\nabla_l R_{ijk},\ \nabla R^a_{bij}=\omega^k\nabla_k R^a_{bij},$$

$$\nabla R^i_{ajk}=\omega^l\nabla_l R^i_{ajk},\ \nabla R_{aij}=\omega^k\nabla_k R_{aij},$$

где

$$\nabla R^i_{jkl}=dR^i_{jkl}+R^s_{jkl}\tilde\omega^i_s-R^i_{skl}\tilde\omega^s_j-R^i_{jsl}\tilde\omega^s_k-R^i_{jks}\tilde\omega^s_l,$$

$$\nabla R_{ijk}=dR_{ijk}-R_{ljk}\tilde\omega^l_i-R_{ilk}\tilde\omega^l_j-R_{ijl}\tilde\omega^l_k+\underline{R^l_{ijk}\tilde\omega_l},$$

$$\nabla R^a_{bij}=dR^a_{bij}+R^c_{bij}\tilde\omega^a_c-R^a_{cij}\tilde\omega^c_b-R^a_{bkj}\tilde\omega^k_i-R^a_{bik}\tilde\omega^k_j,$$

$$\nabla R^i_{ajk}=dR^i_{ajk}+R^l_{ajk}\tilde\omega^i_l-R^i_{bjk}\tilde\omega^b_a-R^i_{alk}\tilde\omega^l_j-R^i_{ajl}\tilde\omega^l_k+\underline{R^b_{ajk}\tilde\omega^i_b}-\underline{R^i_{ljk}\tilde\omega^l_a},$$

$$\nabla R_{aij}=dR_{aij}-R_{bij}\tilde\omega^b_a-R_{akj}\tilde\omega^k_i-R_{aik}\tilde\omega^k_j+\underline{R^k_{aij}\tilde\omega_k}+\underline{R^b_{aij}\tilde\omega_b}-\underline{R_{kij}\tilde\omega^k_a}\ -$$

ковариантные дифференциалы, а

$$\nabla_s R^i_{jkl}=R^i_{jkls}-R^t_{jkl}\Gamma^i_{ts}+R^i_{tkl}\Gamma^t_{js}+R^i_{jtl}\Gamma^t_{ks}+R^i_{jkt}\Gamma^t_{ls},$$

$$\nabla_l R_{ijk}=R_{ijkl}+R_{sjk}\Gamma^s_{il}+R_{isk}\Gamma^s_{jl}+R_{ijs}\Gamma^s_{kl}-\underline{R^s_{ijk}\Gamma_{sl}},$$

$$\nabla_k R^a_{bij}=R^a_{bijk}-R^c_{bij}\Gamma^a_{ck}+R^a_{cij}\Gamma^c_{bk}+R^a_{blj}\Gamma^l_{ik}+R^a_{bil}\Gamma^l_{jk},$$

$$\nabla_l R^i_{ajk}=R^i_{ajkl}-R^s_{ajk}\Gamma^i_{sl}+R^i_{bjk}\Gamma^b_{al}+R^i_{ask}\Gamma^s_{jl}+R^i_{ajs}\Gamma^s_{kl}-\underline{R^b_{ajk}\Gamma^i_{bl}}+\underline{R^i_{sjk}\Gamma^s_{al}},$$

$$\nabla_k R_{aij}=R_{aijk}+R_{bij}\Gamma^b_{ak}+R_{alj}\Gamma^l_{ik}+R_{ail}\Gamma^l_{jk}-\underline{R^l_{aij}\Gamma_{lk}}-\underline{R^b_{aij}\Gamma_{bk}}+\underline{R_{lij}\Gamma^l_{ak}}\ -$$

ковариантные производные компонент тензора кривизны R.

Замечание. Найденные ковариантные дифференциалы и ковариантные производные включают в себя тензорную и нетензорную (подчеркнутую) части.

Дифференцируя уравнения (1_1) внешним образом, найдем соотношение $R^i_{jkl}\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0$, откуда $R^i_{[jkl]} = 0$, или, учитывая кососимметричность тензора R^i_{jkl} по индексам k, l, получим

$$R^i_{\{jkl\}} = 0\,, \tag{5}$$

где фигурные скобки обозначают циклирование. Соотношение (5) называется первым тождеством Бианки (тождеством Риччи) в координатном представлении.

Дифференцируя структурные уравнения (3), найдем вторые тождества Бианки в координатном представлении

$$\nabla_{\{s}R^i_{|j|kl\}} = 0\,,\ \nabla_{\{l}R_{|i|jk\}} = 0\,,\ \nabla_{\{k}R^a_{|b|ij\}} = 0\,,\ \nabla_{\{l}R^i_{|a|jk\}} = 0\,,\ \nabla_{\{k}R_{|a|ij\}} = 0\,.$$

Введем в рассмотрение форму кривизны $\Omega = \{\Omega^i_j, \Omega_i, \Omega^a_b, \Omega^i_a, \Omega_a\}$ с компонентами

$$\Omega^i_j = R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l\,,\ \Omega_i = R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k\,,\ \Omega^a_b = R^a_{bij}\omega^i \wedge \omega^j\,,$$

$$\Omega^i_a = R^i_{ajk}\omega^j \wedge \omega^k\,,\ \Omega_a = R_{aij}\omega^i \wedge \omega^j\,.$$

Тогда структурные уравнения (3) можно записать в виде

$$\begin{gathered} d\tilde\omega^i_j = \tilde\omega^k_j \wedge \tilde\omega^i_k + \Omega^i_j\,,\ d\tilde\omega_i = \tilde\omega^j_i \wedge \tilde\omega_j + \Omega_i\,,\ d\tilde\omega^a_b = \tilde\omega_b \wedge \tilde\omega^a + \Omega^a_b\,, \\ d\tilde\omega^i_a = \tilde\omega^j_a \wedge \tilde\omega^i_j + \tilde\omega^b_a \wedge \tilde\omega^i_b + \Omega^i_a\,,\ d\tilde\omega_a = \tilde\omega^i_a \wedge \tilde\omega_i + \tilde\omega^b_a \wedge \tilde\omega_b + \Omega_a\,. \end{gathered} \tag{3′}$$

Дифференцируя уравнения (3′) внешним образом, получим тождества

$$\begin{gathered} d\Omega^i_j = -\tilde\omega^i_k \wedge \Omega^k_j + \tilde\omega^k_j \wedge \Omega^i_k,\ d\Omega_i = \tilde\omega^j_i \wedge \Omega_j - \underline{\tilde\omega_j \wedge \Omega^j_i},\ d\Omega^a_b = -\tilde\omega^a_c \wedge \Omega^c_b + \tilde\omega^c_b \wedge \Omega^a_c, \\ d\Omega^i_a = -\tilde\omega^i_j \wedge \Omega^j_a + \tilde\omega^b_a \wedge \Omega^i_b + \underline{\tilde\omega^j_a \wedge \Omega^i_j} - \underline{\tilde\omega^i_b \wedge \Omega^b_a}\,, \\ d\Omega_a = \tilde\omega^b_a \wedge \Omega_b + \underline{\tilde\omega^i_a \wedge \Omega_i} + \underline{\tilde\omega_i \wedge \Omega^i_a} - \underline{\tilde\omega_b \wedge \Omega^b_a}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Тождество (6_1) — второе тождество Бианки для касательной линейной кривизны; его можно записать в виде $D\Omega^i_j = 0$, где D — символ внешнего ковариантного дифференциала. Аналогично тождество (6_3) для нормальной линейной кривизны примет вид $D\Omega^a_b = 0$.

Остальные тождества (6_2, 6_4, 6_5) являются аналогами тождеств Бианки, содержат как тензорные слагаемые так и нетензорные (подчеркнутые) и записываются в виде $D\Omega_i = 0$, $D\Omega^i_a = 0$, $D\Omega_a = 0$.

Из уравнений (2) найдем выражения для ковариантных производных компонент объекта связности Γ, альтернируя которые, получим

$$\begin{gathered} \nabla_{[l}\Gamma^i_{|j|k]} = R^i_{jkl} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]} - \Lambda^a_{j[k}\Gamma^i_{|a|l]} + \delta^i_{[k}\Gamma_{|j|l]}\,,\ \nabla_{[k}\Gamma_{|i|j]} = R_{ijk} - \Gamma^l_{i[j}\Gamma_{|l|k]} - \Lambda^a_{i[j}\Gamma_{|a|k]}\,, \\ \nabla_{[j}\Gamma^a_{|b|i]} = R^a_{bij} - \Gamma^c_{b[i}\Gamma^a_{|c|j]} - \Lambda^a_{k[i}\Gamma^k_{|b|j]}\,, \\ \nabla_{[k}\Gamma^i_{|a|j]} = R^i_{ajk} - \Gamma^l_{a[j}\Gamma^i_{|l|k]} - \Gamma^b_{a[j}\Gamma^i_{|b|k]} + \delta^i_{[j}\Gamma_{|a|k]}\,,\ \nabla_{[j}\Gamma_{|a|i]} = R_{aij} - \Gamma^k_{a[i}\Gamma_{|k|j]} - \Gamma^b_{a[i}\Gamma_{|b|j]}\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Используя выражения (7), можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Альтернированные ковариантные производные компонент объекта индуцированной связности 1-го типа [2, с. 86–90]* $\overset{01}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{1}{\Gamma}_{ij}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{1}{\Gamma}{}^i_{aj}, \overset{1}{\Gamma}_{ai}\}$ *равны соответствующим компонентам индуцированного тензора кривизны, то есть справедливы равенства* $\overset{01}{\nabla}_{[j}\overset{01}{\Gamma}_{i]} = \overset{01}{R}_{ij}$, *или в подробной записи*

$$\overset{01}{\nabla}_{[l}\overset{0}{\Gamma}{}^i_{|j|k]} = \overset{0}{R}{}^i_{jkl}\,,\quad \overset{01}{\nabla}_{[k}\overset{1}{\Gamma}_{|i|j]} = \overset{1}{R}_{ijk}\,,\quad \overset{01}{\nabla}_{[j}\overset{0}{\Gamma}{}^a_{|b|i]} = \overset{0}{R}{}^a_{bij}\,,$$

$$\overset{01}{\nabla}_{[k}\overset{1}{\Gamma}{}^i_{|a|j]} = \overset{1}{R}{}^i_{ajk}\,,\quad \overset{01}{\nabla}_{[j}\overset{1}{\Gamma}_{|a|i]} = \overset{1}{R}_{aij}\,.$$

Теорема 2. *В индуцированной связности 2-го типа [2, с. 95–98]* $\overset{02}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{2}{\Gamma}_{ij}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj}, \overset{2}{\Gamma}_{ai}\}$ *справедливы равенства* $\overset{02}{\nabla}_{[j}\overset{02}{\Gamma}_{i]} = 0$, *или подробно:*

$$\overset{02}{\nabla}_{[l}\overset{0}{\Gamma}{}^i_{|j|k]} = 0\,,\quad \overset{02}{\nabla}_{[k}\overset{2}{\Gamma}_{|i|j]} = -\Lambda^a_{i[j}\overset{23}{D}_{|a|k]}\,,\quad \overset{02}{\nabla}_{[j}\overset{0}{\Gamma}{}^a_{|b|i]} = 0\,,$$

$$\overset{02}{\nabla}_{[k}\overset{2}{\Gamma}{}^i_{|a|j]} = \delta^i_{[j}\overset{23}{D}_{|a|k]}\,,\quad \overset{02}{\nabla}_{[j}\overset{2}{\Gamma}_{|a|i]} = -\overset{0}{\Gamma}{}^b_{a[i}\overset{23}{D}_{|b|j]}\,.$$

Равенство 0 тензора деформации $\overset{23}{D}_{ai} = \overset{2}{\Gamma}_{ai} - \overset{3}{\Gamma}_{ai}$ — аналитическое условие совпадения индуцированных связностей 2-го и 3-го типов [3].

Теорема 3. *Альтернированные ковариантные производные компонент объекта индуцированной связности 3-го типа [2, с. 95–98]* $\overset{03}{\Gamma} = \{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{2}{\Gamma}_{ij}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj}, \overset{3}{\Gamma}_{ai}\}$ *равны нулю, то есть справедливы равенства* $\overset{03}{\nabla}_{[j}\overset{03}{\Gamma}_{i]} = 0$, *или в подробной записи*

$$\overset{02}{\nabla}_{[l}\overset{0}{\Gamma}{}^i_{|j|k]} = \overset{03}{\nabla}_{[l}\overset{0}{\Gamma}{}^i_{|j|k]} = 0,\ \overset{03}{\nabla}_{[k}\overset{2}{\Gamma}_{|i|j]} = 0,\ \overset{02}{\nabla}_{[j}\overset{0}{\Gamma}{}^a_{|b|i]} = \overset{03}{\nabla}_{[j}\overset{0}{\Gamma}{}^a_{|b|i]} = 0,\ \overset{03}{\nabla}_{[k}\overset{2}{\Gamma}{}^i_{|a|j]} = 0,\ \overset{03}{\nabla}_{[j}\overset{3}{\Gamma}_{|a|i]} = 0.$$

Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* Об основной задаче проективно-дифференциальной геометрии поверхности // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1989. Вып.20. С.122—128.

2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

3. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // Journal of Mathematical Sciences. 2009. Vol. 162, No. 5. P. 675—709.

Об авторе

Катерина Валентиновна Полякова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: polyakova_@mail.ru

About the author

Dr Katerina Polyakova — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: polyakova_@mail.ru