7. *Шурыгин В.В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и многообразия Вейля // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Т. 73 : Современная математика и ее применения. Тематические обзоры. М., 2002. С. 162—236.

8. *Kolar I.* Affine structures on Weil bundles // Nagoya Math. J. 2000. Vol. 158. P. 99—106.

9. *Султанов А.Я., Мошин А.К.* О сумме Уитни расслоений Вейля // Труды институты системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. М., 2007. Т. 31(1). С. 215—223.

10. *Султанов А.Я.* Гомоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля // Математические заметки. М., 2012. № 91(6). С. 896—899.

A. Sultanov, I. Garkina

Irreducible four dimensional algebras with identity obtained by the Cayley — Dickson doubling

We obtain all the irreducible four dimensional associative algebras with identity over the field of real numbers, which can be obtained by the Cayley — Dickson doubling of real two dimensional algebras with identity.

УДК 514.76

Г.А. Султанова
Пензенский государственный университет
sultgaliya@yandex.ru

О группах движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта над двумерными максимально подвижными пространствами аффинной связности

Исследуются группы движений в касательных расслоениях со связностью полного лифта в случае, когда база расслоения является максимально подвижным пространством аффинной связности.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, касательное расслоение, полный лифт линейной связности, вертикальный лифт векторных полей, полный лифт векторных полей, вертикально-векторное поднятие аффинора, горизонтально-векторное поднятие аффинора.

1. Основные определения и факты. Пусть M — дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности *n*, $T_p(M)$ — касательное пространство к нему в точке $p \in M$. Обозначим через $T(M)$ объединение всех касательных пространств к многообразию *M*:

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M).$$

Отображение $\pi : T(M) \to M$, определенное условием $\pi(t_x) = x$, называется канонической проекцией, а тройка $(T(M), \pi, M)$ — касательным расслоением. В дальнейшем касательное расслоение для краткости будем обозначать через $T(M)$. Для функции $f : M \to R$ класса C^∞ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции *f* с базы *M* в его касательное расслоение $T(M)$ [3].

На расслоении $T(M)$ возникает естественная структура гладкого многообразия над полем действительных чисел, атлас которого состоит из координатных окрестностей вида $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$. Закон преобразования координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i)$ имеет вид

$$\bar{x}_0^i = \bar{x}_0^i(x_0^1, ..., x_0^n), \;\; \bar{x}_1^i = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right)_{(0)} x_1^k. \qquad (1.1)$$

Приведем определения полного лифта функций, векторных полей, полного лифта линейной связности ∇, вертикально-векторного поднятия тензора типа (1,1) с базы в касательное расслоение.

Пусть f — функция класса C^{∞}, заданная на M и $f: M \to R$. Функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ называется полным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение $T(M)$.

На $T(M)$ для векторного поля $X \in \Im_0^1(M)$ определены его вертикальный $X^{(1)}$ и полный $X^{(0)}$ лифты, используя локальные координаты следующим образом:

$$X^{(1)} = X_0^i \partial_i^1, \; X^{(0)} = X_0^i \partial_i^0 + X_1^i \partial_i^1.$$

Здесь $X_0^i = (X^i)_{(0)}, X_1^i = (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j$.

Если на M задана линейная связность ∇, то на касательном расслоении $T(M)$ существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} &\nabla^{(0)}{}_{X^{(0)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)}, \nabla^{(0)}{}_{X^{(0)}} Y^{(1)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \\ &\nabla^{(0)}{}_{X^{(1)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \; \nabla^{(0)}{}_{X^{(1)}} Y^{(1)} = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $X, Y \in \Im_0^1(M)$. Такая связность называется полным лифтом линейной связности ∇ [7]. В данной работе под аффинной связностью будем понимать линейную связность.

В дальнейшем все линейные связности ∇ на базе будут предполагаться без кручения, то есть тензорное поле кручения, определяемое условием $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, будет равно нулю.

Введем определения вертикально-векторного и горизонтально-векторного поднятий аффинора.

Определение 1 [1]. Векторное поле γG, определенное в локальных координатах равенством

$$\gamma G = (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^1, \tag{1.3}$$

называется *вертикально-векторным поднятием аффинора* $G \in \Im_1^1(M)$.

Определение 2 [2]. Векторное поле $F^{H\gamma}$, заданное в локальных координатах равенством

$$F^{H\gamma} = (F_i^j)_{(0)} x_1^i (\partial_j^0 - (\Gamma_{js}^p)_{(0)} x_1^s \partial_p^1), \tag{1.4}$$

называется *горизонтально-векторным поднятием аффинора* $F \in \Im_1^1(M)$.

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования пространств $(T(M), \nabla^{(0)})$.

Определение 3. Векторное поле $\widetilde{X} \in \Im_0^1(T(M))$ называется *инфинитезимальным аффинным преобразованием связности* $\nabla^{(0)}$, если

$$L_{\tilde{X}} \nabla^{(0)} = 0, \tag{2.1}$$

где $L_{\widetilde{X}}$ — символ производной Ли вдоль векторного поля $\widetilde{X} \in \Im_0^1(T(M))$.

Приведем определение проективно-евклидова пространства.

Определение 4 [5]. Пространство аффинной связности с объектом связности Γ_{jk}^i называется *проективно-евклидовым*, если в некоторой окрестности каждой его точки можно перейти в такую координатную систему x^i, в которой геодезические линии задаются линейными параметрическими уравнениями

$$x^i = a^i t + b^i \; (a^i, b^i = const).$$

Необходимый и достаточный признак проективно-евклидовости связности состоит в существовании такого тензора P_{ij}, что тензор кривизны для связности имеет вид [6]

$$R^h_{ijk} = \delta^h_j P_{ik} - \delta^h_k P_{ij} - \delta^h_i (P_{kj} - P_{jk}), \qquad (2.2)$$

причем тензор P_{ij} удовлетворяет условию

$$\nabla_k P_{ij} - \nabla_j P_{ik} = 0. \qquad (2.3)$$

Заметим, что при $n = 2$ условие (2.2) выполняется для любого тензора кривизны, следовательно, необходимым и достаточным условием остается условие (2.3).

Известно [8], что разложение инфинитезимального аффинного преобразования в касательном расслоении со связностью полного лифта будет иметь вид

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G + F^{H\gamma}, \qquad (2.4)$$

где $X, Y \in \Im^1_0(M), G, F \in \Im^1_1(M),$ удовлетворяющие условиям

$$L_X \nabla = 0, L_Y \nabla = 0, \nabla G = 0, R^i_{mkl} G^m_j - R^m_{jkl} G^i_m = 0,$$

$$\nabla F = 0, R^i_{mkl} F^m_j = R^i_{jml} F^m_k = R^i_{jkm} F^m_l = R^m_{jkl} F^i_m = 0.$$

Совокупность всевозможных инфинитезимальных аффинных преобразований образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Пусть $\widetilde{L}$ — алгебра Ли векторных полей вида (2.4), а через L^α (α = 0,1) обозначим совокупность векторных полей вида $X^{(\alpha)}$, L^2 — совокупность векторных полей вида γG, L^3 — совокупность векторных полей вида $F^{H\gamma}$.

Каждое множество является векторным пространством, а векторное пространство $\widetilde{L}$ представляет собой прямую сумму подпространств L^α ($\alpha = 0,1$), L^2, L^3. Поэтому

$$\dim \widetilde{L} = \dim L^0 + \dim L^1 + \dim L^2 + \dim L^3.$$

Имеет место

Предложение 1. *Подпространства* L^{α} *(α = 0, 1),* L^2, L^3 *являются подалгебрами алгебры Ли* $\widetilde{L}$, *причем размерности подалгебр* L^0 *и* L^1 *равны размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства* (M, ∇).

3. Группы движений в $(T(M), \nabla^{(0)})$ **над двумерными максимально подвижными пространствами аффинной связности.** Пусть M_2 — двумерное гладкое дифференцируемое многообразие с аффинной связностью ∇. Будем исследовать группы максимальной размерности пространств $T(M)$ со связностью $\nabla^{(0)}$.

Известна следующая

Теорема 1 [4]. *Максимально подвижные пространства* (M_n, ∇) *аффинной связности ненулевой кривизны обладают транзитивными группами движений, размерность которых равна* n^2.

В случае, когда размерность многообразия равна 2, размерность группы движений пространств (M_n, ∇) не больше, чем 8.

На основе предложения 1 предыдущего пункта заключаем, что имеет место

Предложение 2. *Группа движений пространства* $(T(M_2), \nabla^{(0)})$ *имеет размерность* $\widetilde{r} = 2r + \dim L^2 + \dim L^3$.

Учитывая теорему И. П. Егорова, приведенную выше, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Если пространство* (M_2, ∇) *обладает группой движений максимальной размерности, то группа движений пространства* $(T(M_2), \nabla^{(0)})$ *имеет размерность*

$$\widetilde{r} = 8 + \dim L^2 + \dim L^3.$$

Отсюда следует, чтобы выяснить, чему равна размерность $\widetilde{r}$, достаточно установить размерности алгебр L^2 и L^3.

И. П. Егоровым доказано, что существует три типа двумерных пространств аффинной связности, группы движений которых имеют максимальную размерность 4.

Коэффициенты Γ^i_{jk} $(i, j, k = 1{,}2)$ связностей этих пространств в специальной системе координат (x^i) в M_2 имеют вид [4]

$$\Gamma^1_{11} = f(x^1), \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g(x^1), \text{ другие } \Gamma^i_{jk} = 0. \qquad (3.1)$$

В двух типах функции f и g — постоянные.

Тензорное поле R кривизны этих пространств имеет следующие компоненты:

$$R^2_{112} = -R^2_{121} = \partial_1 g + g(g - f), \text{ другие } R^i_{jkl} = 0.$$

Тензорное поле Риччи имеет ранг 1 и только одну компоненту, отличную от нуля: $R_{11} \neq 0, R_{12} = R_{21} = R_{22} = 0.$

Такая структура тензорного поля кривизны и тензорного поля Риччи позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3. *В каноническом разложении (2.4) произвольного инфинитезимального аффинного преобразования над максимальными пространствами в* $(T(M_2), \nabla^{(0)})$ *последнее слагаемое равно нулю, т. е.* $F^{H\gamma} = 0.$

Доказательство. Из соотношений $R^i_{mkl} F^m_j = 0$ получим $R^2_{m12} F^m_j = 0.$ Учитывая строение тензора кривизны R пространства со связностью (3.1), имеем $R^2_{112} F^1_j = 0,$ то есть $R_{11} F^1_j = 0.$ Отсюда, $F^1_j = 0$.

Рассмотрим соотношения $R^2_{jkm} F^m_l = 0.$ При $j = k = 1$ из них получим $R^2_{112} F^2_l = 0,$ то есть $R_{11} F^2_l = 0.$ Таким образом, $F = 0,$ значит и $F^{H\gamma} = 0.$

Из этой теоремы следует, что $L^3 = \{0\}$, следовательно, $\dim L^3 = 0$.

Перейдем к описанию подалгебры L^2 для $(T(M_2), \nabla^{(0)})$, которая состоит из полей вида γG, где G — тензорное поле типа (1.1) и удовлетворяет условию $\nabla G = 0$. В локальных координатах (x^i) уравнение $\nabla G = 0$ равносильно системе дифференциальных уравнений

$$\partial_j G_k^i = G_p^i \Gamma_{kj}^p - G_k^p \Gamma_{pj}^i. \tag{3.2}$$

Первую серию условий интегрируемости этой системы составляют соотношения

$$G_k^s R_{sjl}^i - G_s^i R_{kjl}^s = 0.$$

Эти соотношения равносильны следующей системе уравнений:

$$G_1^1 - G_2^2 = 0,\ G_2^1 = 0.$$

Дифференцируя каждое соотношение по x^j, получим вторую серию условий интегрируемости:

$$\partial_j G_1^1 - \partial_j G_2^2 = 0,\ \partial_j G_2^1 = 0. \tag{3.3}$$

Найдем частные производные $\partial_j G_1^1, \partial_j G_2^2, \partial_j G_2^1$ и подставим их в полученные соотношения (3.3). Из выражения (3.2) с учетом первой серии условий интегрируемости и соотношений (3.1) получим равенства

$$\partial_j G_1^1 = G_p^1 \Gamma_{1j}^p - G_1^p \Gamma_{pj}^1 = G_1^1 \Gamma_{1j}^1 - G_1^1 \Gamma_{1j}^1 = 0,$$

$$\partial_j G_2^2 = G_p^2 \Gamma_{2j}^p - G_2^p \Gamma_{pj}^2 = G_2^2 \Gamma_{2j}^2 - G_2^2 \Gamma_{2j}^2 = 0,$$

$$\partial_j G_2^1 = G_p^1 \Gamma_{2j}^p - G_2^p \Gamma_{pj}^1 = 0.$$

После подстановки этих производных в (3.3), новых соотношений для составляющих тензорного поля G мы не получим.

Поэтому ранг системы, составляющих условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений (3.2), равен 2. Следовательно, общее решение этой системы будет зависеть от двух произвольных постоянных. Значит, векторное пространство решений системы (3.2) будет двумерным. Таким образом, $\dim L^2 = 2$.

На основании полученных результатов имеет место

Теорема 4. *Группа движений пространства* $(T(M_2), \nabla^{(0)})$ *в случае, когда база* (M_2, ∇) *является максимально подвижным пространством, равна 10.*

Список литературы

1. *Sato K.* Infinitesimal affine transformations of the tangent bundles with Sasaki metric // Tohoku Math. Jourr. 1974. № 26. P. 353—361.
2. *Tanno S.* Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric // Tensor, N. S. 1974. Vol. 28. P. 139—144.
3. *Yano K., Ishihara, S.* Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker, Inc., N. Y., 1973.
4. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности. М., 2009.
5. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967.
6. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. М., 1979.
7. *Султанов А. Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Матем. 1999. № 9. С. 64—72.
8. *Шадыев Х.* Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Тр. геом. сем. 1984. № 16. С. 117—127.

G. Sultanova

About groups of movements in the tangent bundles with a complete lift connection of two-dimensional maximally mobile spaces of affine connection

We research groups of movements in the tangent bundles with a complete lift connection of two-dimensional maximally mobile spaces of affine connection.