УДК 514.75

Н. А. Елисеева[1]

[1] _Калининградский государственный технический университет, Россия_
ne2705@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-8

Нормализации Нордена — Чакмазяна распределений, заданных на гиперповерхности

В проективном пространстве продолжаем изучать гиперповерхность, несущую тройку сильно взаимных распределений. Для оснащающих распределений гиперповерхности внутренним образом введена нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна.

Ключевые слова: гиперповерхность, распределение, нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна, инвариантность нормалей 1-го и 2-го рода.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\sigma,\tau=\overline{1,n-1};\ p,q=\overline{1,r};\ v,w=\overline{r+1,n-1};\ i,j=\overline{r+1,m};$$

$$\mu,\eta=\{\overline{1,r};\ \overline{m+1,n-1}\};\ a,b=\overline{1,m};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1}.$$

Продолжаем изучать гиперповерхность $\Omega_{n-1}\subset P_n$, несущую тройку сильно взаимных (Λ,L,E)-распределений [1]. Этот объект является элементом трехсоставного сильно взаимного распределения $VH\subset P_n$ [2] в случае, когда H-распределение голономно, при этом основные распределения связаны соотношениями

$$\Lambda_r(A_0)\subset M_m(A_0)\subset H_{n-1}(A_0),\ M_m(A_0)=\left[\Lambda_r(A_0),L_s(A_0)\right],\ s=m-r,$$

Поступила в редакцию 17.05.2020 г.

$$\Phi_{n-r-1}(A_0) = \left[L_s(A_0), E_{n-m-1}(A_0) \right],$$
$$\Psi_{n-s-1}(A_0) = \left[\varLambda_r(A_0), E_{n-m-1}(A_0) \right],$$

$$\Phi_{n-r-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = L_s(A_0)\,,\ \Psi_{n-s-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = \varLambda_r(A_0)\,,$$

где $\Phi_{n-r-1}(A_0)$, $\Psi_{n-s-1}(A_0)$, $E_{n-m-1}(A_0)$ — характеристики гиперплоскости $H(A_0)$ при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых $\varLambda$-, L-, M-распределений [1].

1. Будем говорить, что $\varLambda$-распределение, заданное на гиперповерхности Ω_{n-1}, нормализовано в смысле Нордена — Чакмазяна [2], если в каждой точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ к нему инвариантным образом присоединены поля нормалей 1-го рода $N_{n\text{-}r}(A_0)$ и нормалей 2-го рода $N_{r-1}(A_0)$, определяемые, соответственно, полями квазитензоров

$$\nabla \nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{n\sigma}^p \omega_0^\sigma \text{ (a)}, \ \ \nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{p\sigma}^0 \omega_0^\sigma\,. \qquad (1)$$

Отметим, что в каждой точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ нормаль 1-го рода $N_{n\text{-}r}(A_0) = [\Phi_{n-r-1}; X_n]$ проходит через характеристику Φ_{n-r-1} касательной гиперплоскости $H(A_0)$, полученную при смещениях точки A_0 вдоль интегральных кривых $\varLambda$-распределения. Требование инвариантности нормали $N_{n\text{-}r}(A_0)$, где $X_n = A_n + \nu_n^p A_p + \nu_n^v A_v$, приводит к условиям (1.a). Если потребовать, чтобы прямая $\lambda_1 = [A_0, X_n]$ была инвариантна, то кроме (1.a) получим условия

$$\nabla \nu_n^v + \omega_n^v = \nu_{n\sigma}^v \omega_0^\sigma\,. \qquad (2)$$

Уравнения (2) выполняются, если охват объекта $\{\nu_n^v\}$ осуществить с помощью квазитензора

$$\varLambda_n^v = \frac{1}{r} \varLambda_{pq}^v \varLambda_n^{qp}\,, \quad \nabla \varLambda_n^v + \omega_n^v = \lambda_{n\sigma}^v \omega_0^\sigma\,,$$

где $\varLambda_{pq}^v \overset{def}{=} \{\varLambda_{pq}^i; \varLambda_{pq}^\alpha\}$ [3].

В дальнейшем считаем, что прямая $\lambda_1 = [A_0; X_n]$ инвариантна, а точка X_n имеет разложение вида

$$X_n = A_n + \nu_n^p A_p + \Lambda_n^v A_v .$$

Итак, под полем нормалей 1-го рода $N_{n\text{-}r}(A_0)$ Λ-распределения мы будем понимать поле соответствующего квазитензора $\{\nu_n^p\}$.

Если охваты квазитензоров $\{\nu_n^p\}$, $\{\nu_p^0\}$ осуществить, например, по формулам $\nu_n^p = \Lambda_n^p$, $\nu_p^0 = \lambda_p^0$, где

$$\Lambda_n^p = \frac{1}{s}\Lambda_{ij}^p \Lambda_n^{ji}, \quad \nabla\Lambda_n^p + \omega_n^p = \Lambda_{n\sigma}^p \omega_0^\sigma , \tag{3}$$

$$\lambda_p^0 = -\frac{1}{s}\Lambda_{pi}^i, \quad \nabla\lambda_p^0 + \omega_p^0 = \lambda_{p\sigma}^0 \omega_0^\sigma , \tag{4}$$

то в дифференциальной окрестности 2-го порядка к оснащающему Λ-распределению гиперповерхности Ω_{n-1} внутренним образом присоединяется нормализация Нордена — Чакмазяна $(\Lambda_n^p, \lambda_p^0)$.

Проведем аналогичные рассуждения для других оснащающих распределений гиперповерхности, что приведет нас к следующим результатам.

2. В дифференциальной окрестности 2-го порядка к L-распределению, заданному на гиперповерхности Ω_{n-1}, внутренним образом будет присоединена нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна, если охваты квазитензоров $\{\nu_n^i\}$ и $\{\nu_i^0\}$, определяющих соответственно нормаль 1-го рода

$$N_{n\text{-}s}(A_0) = [\Psi_{n-s-1}; Y_n] ,$$

где $Y_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^\mu A_\mu$, и нормаль 2-го рода

$$N_{s-1}(A_0) \subset L(A_0), \ \mathrm{A}_0 \notin N_{s-1}(A_0),$$

осуществить по формулам $\nu_n^i = \Lambda_n^i$, $\nu_i^0 = \lambda_i^0$, где

$$\Lambda_n^i = \frac{1}{r}\Lambda_{pq}^i \Lambda_n^{qp}, \quad \nabla \Lambda_n^i + \omega_n^i = \Lambda_{n\sigma}^i \omega_0^\sigma, \tag{5}$$

$$\lambda_i^0 = -\frac{1}{r}\Lambda_{ip}^p, \quad \nabla \lambda_i^0 + \omega_i^0 = \Lambda_{i\sigma}^0 \omega_0^\sigma. \tag{6}$$

При этом прямая $l_1 = [A_0; Y_n]$ будет инвариантна, если охват объекта $\{\nu_n^\mu\}$ построить следующим образом:

$$L_n^\mu = \frac{1}{s}\Lambda_{ij}^\mu \Lambda_n^{ji}, \quad \nabla L_n^\mu + \omega_n^\mu = L_{n\sigma}^\mu \omega_0^\sigma,$$

где $\Lambda_{ij}^\mu = \{\Lambda_{ij}^p; \Lambda_{ij}^\alpha\}$ [3].

3. Нормализацию Нордена — Чакмазяна E-распределения, заданного на гиперповерхности Ω_{n-1}, определим следующим образом. В каждой точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ для плоскости $E(A_0)$ заданы нормаль 1-го рода $N_{m+1}(A_0) = [M_m; Z_n]$, где

$$Z_n = A_n + \nu_n^\alpha A_\alpha + \nu_n^a A_a,$$

и нормаль 2-го рода

$$N_{n-m-2}(A_0) \subset E(A_0), \ A_0 \notin N_{n-m-2}(A_0),$$

условия инвариантности которых соответственно имеют вид

$$\nabla \nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma, \quad \nabla \nu_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \nu_{\alpha\sigma}^0 \omega_0^\sigma. \tag{7}$$

Соотношения (7) выполняются, если охваты квазитензоров $\{\nu_n^\alpha\}$, $\{\nu_\alpha^0\}$ представить, например, в виде

$$\nu_n^\alpha = E_n^\alpha, \ \nu_\alpha^0 = \varepsilon_\alpha^0,$$

где $E_n^\alpha = \dfrac{1}{m}\Lambda_{ab}^\alpha \Lambda_n^{ba}$, $\varepsilon_\alpha^0 = -\dfrac{1}{m}\Lambda_{\alpha a}^a$.

Если охват квазитензора $\{\nu_n^a\}$ осуществить, например, по формуле $\nu_n^a = E_n^a$, где $E_n^a = \dfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{\alpha\beta}^a \Lambda_n^{\beta\alpha}$, то прямая $\varepsilon_1 = [A_0; Z_n]$ будет инвариантна.

4. Будем говорить, что оснащающее *M*-распределение гиперповерхности Ω_{n-1} нормализовано в смысле Нордена — Чакмазяна [2], если к нему инвариантным образом присоединены поля нормалей 1-го рода $N_{n\text{-}m}(A_0) = [E_{n-m-1}; \varepsilon_n]$ и нормалей 2-го рода $N_{m\text{-}1}(A_0)$, определяемые соответственно полями квазитензоров:

$$\nabla \nu_n^a + \omega_n^a = \nu_{n\sigma}^a \omega_0^\sigma, \quad \nabla \nu_a^0 + \omega_a^0 = \nu_{a\sigma}^0 \omega_0^\sigma,$$

где $\varepsilon_n = A_n + \nu_n^a A_a + E_n^\alpha A_\alpha$.

При этом охваты квазитензоров можно осуществить, например, по формулам $\nu_n^a = \Lambda_n^a \overset{def}{=} \{\Lambda_n^p; \Lambda_n^i\}$ (3, 5), $\nu_a^0 = \lambda_a^0 \overset{def}{=} \{\lambda_p^0; \lambda_i^0\}$ (4, 6).

Прямая $\mu_1 = [A_0; \varepsilon_n]$ является инвариантной, если охват объекта $\{\nu_n^\alpha\}$ представить в виде

$$E_n^\alpha = \frac{1}{m}\Lambda_{ab}^\alpha \Lambda_n^{ba}, \quad \nabla E_n^\alpha + \omega_n^\alpha = E_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma .$$

5. Для оснащающего *Ф*-распределения гиперповерхности Ω_{n-1} нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна [2] определяется следующим образом. В каждой точке $A_0 \in \Omega_{n-1}$ для плоскости $\Phi(A_0)$ задается нормаль 1-го рода

$$N_{r+1}(A_0) = [\Lambda_r(A_0); \Phi_n(A_0)],$$

где $\Phi_{\text{n}} = A_n + \nu_n^{\text{v}} A_v + \nu_n^p A_p$, и нормаль 2-го рода $N_{n-r-2}(A_0)$ в смысле Нордена [4], условия инвариантности которых имеют соответственно вид

$$\nabla \nu_n^v + \omega_n^v = \nu_{n\sigma}^v \omega_0^\sigma , \quad \nabla \nu_v^0 + \omega_v^0 = \nu_{v\sigma}^0 \omega_0^\sigma .$$

Охваты квазитензоров $\{\nu_n^v\}$, $\{\nu_v^0\}$ можно осуществить, например, по формулам

$$\nu_n^v = \Lambda_n^v \overset{def}{=} \{\Lambda_n^i ; \Lambda_n^\alpha\} , \quad \nu_v^0 = \lambda_v^0 \overset{def}{=} \{\lambda_i^0 ; \lambda_\alpha^0\} ,$$

где Λ_n^i, λ_i^0 определяются соответственно соотношениями (5), (6) и

$$\Lambda_n^\alpha = \frac{1}{r} \Lambda_{pq}^\alpha \Lambda_n^{qp} , \quad \nabla \Lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Lambda_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma ,$$

$$\lambda_\alpha^0 = -\frac{1}{r} \Lambda_{\alpha p}^p , \quad \nabla \lambda_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \lambda_{\alpha\sigma}^0 \omega_0^\sigma .$$

Требование инвариантности прямой $\varphi_1 = [A_0 ; \Phi_n]$ выполняется, если охват объекта $\{\nu_n^p\}$, например, представить в виде

$$\Phi_n^p = \frac{1}{n-r-1} \Lambda_{vw}^p \Lambda_n^{wv} , \quad \nabla \Phi_n^p + \omega_n^p = \Phi_{n\sigma}^p \omega_0^\sigma .$$

6. В дифференциальной окрестности 2-го порядка к оснащающему Ψ-распределению гиперповерхности Ω_{n-1} внутренним образом будет присоединена нормализация в смысле Нордена — Чакмазяна, если охваты квазитензоров $\{\nu_n^\mu\}$ и $\{\nu_\mu^0\}$, задающих соответственно нормаль 1-го рода $N_{s+1}(A_0) = [L_s(A_0) ; \Psi_n(A_0)]$, где $\Psi_{\text{n}} = A_n + \nu_n^\mu A_\mu + \nu_n^i A_i$, и нормаль 2-го рода $N_{n-s-1}(A_0)$, представить в виде

$$\nu_n^\mu = \Lambda_n^\mu \overset{def}{=} \{\Lambda_n^p ; \widetilde{\Lambda}_n^\alpha\} , \quad \nu_\mu^0 = \lambda_\mu^0 \overset{def}{=} \{\lambda_p^0 ; \widetilde{\lambda}_\alpha^0\} ,$$

где Λ_n^p и λ_p^0 определяются соответственно по формулам (3), (4) и

$$\widetilde{\Lambda}_n^\alpha = \frac{1}{s}\Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ji}, \quad \nabla\widetilde{\Lambda}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \widetilde{\Lambda}_{n\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma,$$

$$\widetilde{\lambda}_\alpha^0 = -\frac{1}{s}\Lambda_{\alpha i}^i, \quad \nabla\widetilde{\lambda}_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \widetilde{\lambda}_{\alpha\sigma}^0 \omega_0^\sigma.$$

Прямая $\psi_1 = [A_0; \Psi_n]$ является инвариантной, если $v_n^i = \Psi_n^i$, где $\Psi_n^i = \dfrac{1}{n\text{-}s\text{-}1}\Lambda_{\mu\eta}^i \Lambda_n^{\eta\mu}$, $\nabla\Psi_n^i + \omega_n^i = \Psi_{n\sigma}^i \omega_0^\sigma$.

Список литературы

1. *Елисеева Н.А.* Гиперповерхность проективного пространства, оснащенная распределениями // ДГМФ. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 52—63.
2. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства : монография. СПб., 1992.
3. *Елисеева Н.А.* Поля фундаментальных и охваченных объектов гиперповерхности, оснащенной распределениями // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 68—77.
4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

N.A. Eliseeva[1]

[1] *Kaliningrad State Technical University*
1 Sovietsky Prospect, Kaliningrad, 36022, Russia
ne2705@gmail.com

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-8

Normalization of Norden — Chakmazyan for distributions given on a hypersurface

Submitted on May 17, 2020

In the projective space, we continue to study a hypersurface with three strongly mutual distributions. For equipping distributions of a hypersurface, normalization in the sense of Norden — Chakmazyan is

introduced internally. The distribution of the equipping planes is normalized in the sense of Norden — Chakmazyan if the fields of normals of the 1st kind and normals of the 2^{nd} kind are attached to it in an invariant way. For each equipping distribution, the fields of normals of the 1^{st} and 2^{nd} kind are defined by the corresponding fields of quasitensors. At each point of the hypersurface, the normal of the 1^{st} kind of the equipping distribution of the hypersurface passes through the characteristic of the tangent hypersurface. This characteristic was obtained with displacements of the point along the integral curves of the equipping distribution.

For equipping distributions, the coverage of quasitensors is found under which the conditions of invariance of the normals of the 1^{st} and 2^{nd} kind are satisfied.

Coverage of quasitensors is found for which normalization in the sense of Norden — Chakmazyan is attached to the equipping distributions of the hypersurface in a second-order differential neighborhood.

Keywords: hypersurface, distribution, normalization in the sense of Norden — Chakmazyan, invariance of normals of the 1^{st} and 2^{nd} kind.

References

1. *Eliseeva, N. A.:* Hypersurfaces of projective space equipped with distributions. DGMF. Kaliningrad. 44, 52—63 (2013).

2. *Popov, Yu. I.:* Fundamentals of the theory of three-part distributions of projective space. St. Petersburg (1992).

3. *Eliseeva, N. A.:* Fields of the fundamental and enveloped objects of hypersurface equipped with distributions. DGMF. Kaliningrad. 47, 68—77 (2016).

4. *Norden, A. P.:* Spaces with an affine connection. Moscow (1976).