УДК 514.75

А. В. Кулешов

О СОВПАДЕНИИ И ИНТЕРПРЕТАЦИИ СВЯЗНОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ НА СЕМЕЙСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Исследуется семейство центрированных плоскостей в проективном пространстве. Показано, что композиционное оснащение семейства, состоящее в задании полей аналогов плоскостей Картана и нормалей 2-го рода Нордена, индуцирует шесть пучков групповых связностей, в каждом из которых выделяется по одной связности. Найдены условия совпадения связностей и дана их геометрическая характеристика при помощи параллельных перенесений.

Family of centered planes in projective space is investigated. It is shown that composite clothing of this family induces 6 bunches of group connections. In each of this bunches one connection is allocated. Their conditions of coinciding are found. Geometric interpretation each of them is done.

Ключевые слова: проективное пространство, семейство центрированных плоскостей, связность, композиционное оснащение.

Keywords: projective space, family of centered planes, connection, composite clothing.

1. Семейство центрированных плоскостей

Индексы в работе принимают следующие значения:

$$I, J, K = \overline{1, n}, \quad a, b, c = \overline{1, m}, \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}, \quad i, j, k = \overline{1, r}.$$

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA = \theta A + \omega^I A_\mathrm{I}, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A \,. \tag{1}$$

Структурные уравнения P_n запишем в виде [4]

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \; D\omega_K^I = \omega_K^J \wedge \omega_J^I + \delta_K^I \omega_J \wedge \omega^J + \omega_K \wedge \omega^\mathrm{I}, \; D\omega_I = \omega_I^K \wedge \omega_\mathrm{K}, \tag{2}$$

где $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ — структурные формы проективной группы $\mathrm{GP}(n)$.

В пространстве P_n рассмотрим m-мерную ($1 \leqslant m < n$) центрированную плоскость $L_m^* = (L_m, C)$. Специализируем репер $\{A, A_a, A_\alpha\}$, поместив вершину A в центр C плоскости L_m^*, A_a — на плоскость L_m^*. Система уравнений r-мерного многообразия B_r $(1 \leqslant r < m(n-m)+n)$ центрированных плоскостей L_m^* в параметрической форме имеет вид [1]

$$\omega^a = \Lambda_i^a \theta^i, \ \omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i, \ \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i, \tag{3}$$

где формы Пфаффа θ^i являются структурными формами r-мерного гладкого многообразия V_r — пространства параметров, а совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_i^a, \Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$ образует тензор, содержащий три подтензора Λ_i^α, $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_i^a\}$, $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$, и называется фундаментальным тензором 1-го порядка многообразия B_r. Компоненты тензора Λ удовлетворяют дифференциальным уравнениям ($\Lambda_{[ij]}^a = 0$, $\Lambda_{a[ij]}^\alpha = 0$),

$$\Delta\Lambda_i^a + \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha^a = \Lambda_{ij}^a \theta^j, \ \Delta\Lambda_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \ \Delta\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_i^\alpha \omega_a = \Lambda_{aij}^\alpha \theta^j.$$

С многообразием B_r ассоциируется главное расслоение $G_s(B_r)$, базой которого является многообразие B_r, а с типовым слоем — s-членная подгруппа стационарности G_s $(s = n(n+1) - m(n-m))$ плоскости L_m^*. Число s равно количеству форм ω_b^a, ω_β^α, ω_α^a, ω_a, ω_α.

Групповую связность в главном расслоении $G_s(B_r)$ задают формы

$$\begin{gathered}\tilde\omega_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \theta^i, \quad \tilde\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta i}^\alpha \theta^i, \quad \tilde\omega_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha i}^a \theta^i, \\ \tilde\omega_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\theta^i, \quad \tilde\omega_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha i}\theta^i.\end{gathered} \tag{4}$$

Компоненты объекта групповой связности $\Gamma^1 = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{\alpha i}\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a \theta^j, \Delta\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^b \omega_b + \omega_{ai} = \Gamma_{aij}\theta^j, \Delta\Gamma_{\beta i}^\alpha + \omega_{\beta i}^\alpha = \Gamma_{\beta ij}^\alpha \theta^j, \\ \Delta\Gamma_{\alpha i}^a - \Gamma_{bi}^a \omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha i}^\beta \omega_\beta^a + \omega_{\alpha i}^a = \Gamma_{\alpha ij}^a \theta^j, \Delta\Gamma_{\alpha i} + \Gamma_{\alpha i}^a \omega_a + \Gamma_{\alpha i}^\beta \omega_\beta - \Gamma_{ai}\omega_\alpha^a = \Gamma_{\alpha ij}\theta^j,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha \omega_\alpha^a - \delta_b^a(\Lambda_i^\alpha \omega_\alpha + \Lambda_i^c \omega_c) - \Lambda_i^a \omega_b$, $\omega_{ai} = \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha$,

$\omega_{\beta i}^\alpha = -\Lambda_{ai}^\alpha \omega_\beta^a - \delta_\beta^\alpha(\Lambda_i^\gamma \omega_\gamma + \Lambda_i^a \omega_a) - \Lambda_i^\alpha \omega_\beta$, $\omega_{\alpha i}^a = -\Lambda_i^a \omega_\alpha$.

Видно, что объект Γ содержит два простейших и два простых подобъекта: 1) Γ_{bi}^a — объект плоскостной линейной связности; 2) $\Gamma_{\beta i}^\alpha$ — объект нормальной линейной связности; 3) $\{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}\}$ — объект центропроективной связности; 4) $\{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha i}^a\}$ — объект аффинно-групповой связности.

Компоненты объекта кривизны групповой связности $R = \{R_{bij}^a, R_{\beta ij}^\alpha, R_{\alpha ij}^a, R_{aij}, R_{\alpha ij}\}$ выражаются по формулам

$$\begin{gathered}R_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a, R_{\beta ij}^\alpha = \Gamma_{\beta[ij]}^\alpha - \Gamma_{\beta[i}^\gamma \Gamma_{\gamma j]}^\alpha, R_{\alpha ij}^a = \Gamma_{\alpha[ij]}^a - \Gamma_{\alpha[i}^b \Gamma_{bj]}^a - \Gamma_{\alpha[i}^\beta \Gamma_{\beta j]}^a, \\ R_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma_{a[i}^b \Gamma_{bj]}, R_{\alpha ij} = \Gamma_{\alpha[ij]} - \Gamma_{\alpha[i}^a \Gamma_{aj]} - \Gamma_{\alpha[i}^\beta \Gamma_{\beta j]},\end{gathered} \tag{6}$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках.

Продолжая уравнения (5), имеем уравнения на продолжения компонент Γ, используя которые, найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны R^1 групповой связности 1-го порядка:

$$\Delta R^a_{bij} \equiv 0,\ \Delta R^\alpha_{\beta ij} \equiv 0,\ \Delta R^a_{\alpha ij} - R^a_{bij}\omega^b_\alpha + R^\beta_{\alpha ij}\omega^a_\beta \equiv 0,$$
$$\Delta R_{aij} + R^b_{aij}\omega_b \equiv 0,\ \Delta R_{\alpha ij} + R^a_{\alpha ij}\omega_a + R^\beta_{\alpha ij}\omega_\beta - R_{aij}\omega^a_\alpha \equiv 0, \tag{7}$$

где символ «$\equiv$» означает сравнение по модулю базисных форм θ^i.

Таким образом, объект кривизны R образует тензор, содержащий четыре подтензора R^a_{bij}, $\{R^a_{bij}, R_{aij}\}$, $R^\alpha_{\beta ij}$, $\{R^a_{bij}, R^\alpha_{\beta ij}, R^a_{\alpha ij}\}$, которые являются тензорами кривизны подсвязностей, задаваемых соответственно подобъектами Γ^a_{bi}, $\{\Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ai}\}$, $\Gamma^\alpha_{\beta i}$, $\{\Gamma^a_{bi}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^a_{\alpha i}\}$.

2. Композиционное оснащение и индуцированные связности

Определение 1. *Композиционным оснащением [4] семейства B_r называется присоединение к каждой плоскости L^*_m:*

1) $(n-m-1)$-плоскости C_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m (аналог плоскости Картана);

2) $(m-1)$-плоскости N_{m-1}, лежащей в плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр A (аналог нормали 2-го рода Нордена).

Оснащающие плоскости C_{n-m-1}, N_{m-1} определим точками

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A,\ B_a = A_a + \lambda_a A. \tag{8}$$

Дифференцируя эти равенства, запишем систему уравнений, обеспечивающих инвариантность оснащающих плоскостей:

$$\Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\theta^i,\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\theta^i,\ \Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai}\theta^i. \tag{9}$$

Таким образом, композиционное оснащение задается полем квазитензора $\lambda = \{\lambda_a, \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$ на базе B_r.

Композиционное оснащение определяет нормализацию 1-го рода — поле плоскостей $N_{n-m} = C_{n-m-1} \oplus A$, порожденных плоскостями Картана C_{n-m-1}, а оснащение Бортолотти — поле гиперплоскостей $P_{n-1} = C_{n-m-1} \oplus N_{m-1}$, натянутых на плоскости C_{n-m-1} и нормали 2-го рода N_{m-1}.

Вводя формы связности (4) в уравнения (9), получим

$$\nabla\lambda_a = \nabla_i\lambda_a\theta^i,\ \nabla\lambda^a_\alpha = \nabla_i\lambda^a_\alpha\theta^i,\ \nabla\lambda_\alpha = \nabla_i\lambda_\alpha\theta^i, \tag{10}$$

где в левых частях стоят ковариантные дифференциалы компонент λ относительно групповой связности Γ:

$$\nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\tilde\omega^b_a + \tilde\omega_a,\ \nabla\lambda^a_\alpha = d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha\tilde\omega^a_b - \lambda^a_\beta\tilde\omega^\beta_\alpha + \tilde\omega^a_\alpha,\ \nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\tilde\omega^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\tilde\omega_a + \tilde\omega_\alpha,$$

а в правых перед базисными формами — ковариантные производные

$$\nabla_i\lambda_a=\lambda_{ai}+\lambda_b\Gamma^b_{ai}-\Gamma_{ai},\ \ \nabla_i\lambda^a_\alpha=\lambda^a_{\alpha i}-\lambda^b_\alpha\Gamma^a_{bi}+\lambda^a_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i}-\Gamma^a_{\alpha i},$$
$$\nabla_i\lambda_\alpha=\lambda_{\alpha i}+\lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i}-\lambda^a_\alpha\Gamma_{ai}-\Gamma_{\alpha i}.$$

Эти ковариантные производные удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям:

$$\Delta\nabla_i\lambda_a\equiv 0,\ \Delta\nabla_i\lambda^a_\alpha\equiv 0,\ \Delta\nabla_i\lambda_\alpha+\nabla_i\lambda^a_\alpha\omega_a\equiv 0.$$

Совокупность ковариантных производных $\{\nabla_i\lambda_a,\nabla_i\lambda^a_\alpha,\nabla_i\lambda_\alpha\}$ компонент оснащающего квазитензора λ образует тензор, содержащий три подтензора $\nabla_i\lambda_a$, $\nabla_i\lambda^a_\alpha$, $\{\nabla_i\lambda^a_\alpha,\nabla_i\lambda_\alpha\}$.

Теорема 1. *Композиционное оснащение многообразия B_r позволяет задать в ассоциированном расслоении $G_s(B_r)$ шесть многопараметрических пучков связностей, в каждом из которых выделяется по одной связности* [2].

Доказательство. Компоненты объекта Γ могут подчиняться

$$\begin{aligned}\overset{1(A,B)}{\Gamma}_{\alpha i}&=\overset{1}{\Gamma}_{\alpha i}(\Gamma^a_{bi},\Gamma^\beta_{\alpha i},\overset{A}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{B}{\Gamma}_{ai})=\overset{A}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}\lambda_a-\Gamma^\beta_{\alpha i}\mu_\beta-\overset{B}{\Gamma}_{ai}\lambda^a_\alpha+\Gamma^a_{bi}\lambda^b_\alpha\lambda_a-\\&\quad-\Lambda^\beta_{bi}\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\lambda_a+\Lambda^a_i\lambda_a\lambda_\alpha+\Lambda^\beta_{ai}\lambda^a_\alpha\lambda_\beta-\Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\mu_\beta,\\ \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}&=-\Gamma^a_{bi}\lambda^b_\alpha+\Gamma^\beta_{\alpha i}\lambda^a_\beta+\Lambda^\beta_{bi}\lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha+\Lambda^\beta_i\lambda_\alpha\lambda^a_\beta-\Lambda^a_i\lambda_\alpha,\\ \overset{1}{\Gamma}_{ai}&=\Gamma^b_{ai}\lambda_b-\Lambda^\alpha_{ai}\mu_\alpha-M^b_i\lambda_b\lambda_a+\Lambda^\alpha_i\lambda_a\lambda_\alpha,\end{aligned}\tag{12}$$

где $A, B, C=1, 2$; $M^a_i=\Lambda^\beta_i\lambda^a_\beta-\Lambda^a_i$ — тензор; $\mu_\beta=\lambda^a_\beta\lambda_a-\lambda_\beta$.

Обращая ковариантные производные (11) в нуль, получим новые возможные соотношения на компоненты объекта Γ:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}=\lambda^a_{\alpha i}+\lambda^a_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i}-\lambda^b_\alpha\Gamma^a_{bi},\ \overset{2}{\Gamma}_{ai}=\lambda_{ai}+\lambda_b\Gamma^b_{ai},\ \overset{2(C)}{\Gamma}_{\alpha i}=\overset{2}{\Gamma}_{\alpha i}(\overset{C}{\Gamma}_{ai})=\lambda^a_{\alpha i}+\lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i}-\lambda^a_\alpha\overset{C}{\Gamma}_{ai}.\tag{13}$$

Комбинируя полученные формулы, получаем шесть пучков:

$$\overset{111}{\Gamma}=\{\Gamma^a_{bi},\Gamma^\alpha_{\beta i},\overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{1}{\Gamma}_{ai},\overset{1(1,1)}{\Gamma}_{\alpha i}\},\ \ \overset{211}{\Gamma}=\{\Gamma^a_{bi},\Gamma^\alpha_{\beta i},\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{1}{\Gamma}_{ai},\overset{1(2,1)}{\Gamma}_{\alpha i}\},$$
$$\overset{212}{\Gamma}=\{\Gamma^a_{bi},\Gamma^\alpha_{\beta i},\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{1}{\Gamma}_{ai},\overset{2(1)}{\Gamma}_{\alpha i}\},\ \ \overset{121}{\Gamma}=\{\Gamma^a_{bi},\Gamma^\alpha_{\beta i},\overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{2}{\Gamma}_{ai},\overset{1(1,2)}{\Gamma}_{\alpha i}\},$$
$$\overset{221}{\Gamma}=\{\Gamma^a_{bi},\Gamma^\alpha_{\beta i},\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{2}{\Gamma}_{ai},\overset{1(2,2)}{\Gamma}_{\alpha i}\},\ \ \overset{222}{\Gamma}=\{\Gamma^a_{bi},\Gamma^\alpha_{\beta i},\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{2}{\Gamma}_{ai},\overset{2(2)}{\Gamma}_{\alpha i}\}.$$

Охваты компонент Γ^a_{bi} и $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ имеют вид [1]

$$\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}=\Lambda^\alpha_{bi}\lambda^a_\alpha-\delta^a_b\Lambda^\alpha_i\lambda_\alpha+M^c_i(\delta^a_b\lambda_c+\delta^a_c\lambda_b),\ \ \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}=-\Lambda^\alpha_{ai}\lambda^a_\beta-\Lambda^\alpha_i\lambda_\beta+\delta^\alpha_\beta(M^a_i\lambda_a-\Lambda^\gamma_i\lambda_\gamma).\tag{14}$$

Подставляя охваты (14) в соотношения (12, 13), мы тем самым выделяем из каждого пучка по одной связности:

$$\overset{0111}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi},\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i},\overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{01}{\Gamma}_{ai},\overset{01(1,1)}{\Gamma}_{\alpha i}\},\ \ \overset{0211}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi},\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i},\overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i},\overset{01}{\Gamma}_{ai},\overset{01(2,1)}{\Gamma}_{\alpha i}\},$$

$$\overset{0212}{\Gamma} = \{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{01}{\Gamma}_{ai}, \overset{02(1)}{\Gamma_{\alpha i}} \}, \quad \overset{0121}{\Gamma} = \{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{02}{\Gamma}_{ai}, \overset{01(1,2)}{\Gamma_{\alpha i}} \},$$

$$\overset{0221}{\Gamma} = \{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{02}{\Gamma}_{ai}, \overset{01(2,2)}{\Gamma_{\alpha i}} \}, \quad \overset{0222}{\Gamma} = \{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}, \overset{02}{\Gamma}{}^a_{\alpha i}, \overset{02}{\Gamma}_{ai}, \overset{02(2)}{\Gamma_{\alpha i}} \}.$$

Замечание. Типы $\overset{0111}{\Gamma}$ и $\overset{0222}{\Gamma}$ ранее рассматривались в работе [1]. Шесть пучков связностей для случая распределения центрированных плоскостей приведены в работе [3].

3. Условия совпадения индуцированных связностей

Дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей

$$\begin{gathered} dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\ldots)^\beta_\alpha B_\beta + t^a_{\alpha i}\theta^i B_a + \left(t_{\alpha i} - \lambda_a t^a_{\alpha i}\right)\theta^i A, \\ dB_a = \theta B_a + (\ldots)^b_a B_b + t^\alpha_{ai}\theta^i B_\alpha + t_{ai}\theta^i A, \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} t^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha i} + \lambda_\alpha \Lambda^a_i - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha \Lambda^\beta_{bi} - \lambda_\alpha \lambda^a_\beta \Lambda^\beta_i, \\ t_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i} - \Lambda^\beta_{ai}\lambda^a_\alpha \lambda_\beta - \Lambda^\beta_i \lambda_\beta \lambda_\alpha, \ t^\alpha_{ai} = \Lambda^\alpha_{ai} + \lambda_a \Lambda^\alpha_i, \\ t_{ai} = \lambda_{ai} - \Lambda^b_i \lambda_b \lambda_a + t^\alpha_{ai}\mu_\alpha . \end{gathered} \tag{16}$$

Из выражения (16) с учетом системы уравнений (9) и уравнений на $\Lambda = \{\Lambda^a_i, \Lambda^\alpha_i, \Lambda^\alpha_{ai}\}$ получаем, что величины $t^a_{\alpha i}, t_{\alpha i}, t^\alpha_{ai}, t_{ai}$ удовлетворяют следующим сравнениям:

$$\Delta t^a_{\alpha i} \equiv 0, \ \Delta t_{\alpha i} + t^a_{\alpha i}\omega_a \equiv 0, \ \Delta t^\alpha_{ai} \equiv 0, \ \Delta t_{ai} \equiv 0 .$$

Заметим, что для $\hat{t}_{\alpha i} = t_{\alpha i} - \lambda_a t^a_{\alpha i}$ выполняется сравнение $\Delta \hat{t}_{\alpha i} \equiv 0$.

Таким образом, совокупность величин $t = \{t^a_{\alpha i}, t_{\alpha i}, t^\alpha_{ai}, t_{ai}\}$ является тензором, содержащим четыре подтензора: $\{t^a_{\alpha i}\}$, $\{t^a_{\alpha i}, t_{\alpha i}\}$, $\{t^\alpha_{ai}\}$, $\{t_{ai}\}$.

Выясним геометрический смысл обращения в нуль тензора t и его подтензоров. Из выражения (15) следует, что при выполнении условия:

1) $t^a_{\alpha i} = 0$ плоскость Картана C_{n-m-1} смещается в нормали 1-го рода N_{n-m} ($dC_{n-m-1} \subset N_{n-m}$);

2) $t^a_{\alpha i} = 0$, $t_{\alpha i} = 0$ плоскость Картана C_{n-m-1} неподвижна;

3) $t^\alpha_{ai} = 0$ смещение нормали 2-го рода N_{m-1} в плоскости L^*_m;

4) $t_{ai} = 0$ смещение нормали 2-го рода Нордена N_{m-1} осуществляется в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1};

5) $\hat{t}_{\alpha i} = 0$ плоскость Картана смещается в гиперплоскости Бортолотти;

6) $t^\alpha_{ai} = 0$, $t_{ai} = 0$ нормаль 2-го рода Нордена неподвижна;

7) $t = 0$ плоскости C_{n-m-1} и N_{m-1} неподвижны, что влечет неподвижность гиперплоскости Бортолотти.

Условия 1, 2, 4, 5 позволяют составить таблицу 1.

Таблица 1

Совпадение связностей разных типов

Г	0111	0211	0212	0121	0221
0211	$dC_{n-m-1} \subset N_{n-m}$	–			
0212	$C_{n-m-1} - \text{const}$	$dC_{n-m-1} \subset P_{n-1}$	–		
0121	$dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$dC_{n-m-1} \subset N_{n-m}$, $dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$C_{n-m-1} - \text{const}$, $dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	–	
0221	$dC_{n-m-1} \subset N_{n-m}$, $dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$dC_{n-m-1} \subset P_{n-1}$, $dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$dC_{n-m-1} \subset N_{n-m}$	–
0222	$C_{n-m-1} - \text{const}$, $dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$dC_{n-m-1} \subset P_{n-1}$, $dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$dN_{m-1} \subset P_{n-1}$	$C_{n-m-1} - \text{const}$	$dC_{n-m-1} \subset P_{n-1}$

Составим таблицу 2, которая дает классификацию индуцированных связностей по обращению в нуль подтензоров тензора ковариантных производных компонент этого квазитензора.

Таблица 2

Ковариантные производные компонент оснащающего квазитензора λ относительно групповых связностей каждого типа

Г	$\nabla_i \lambda_\alpha^a$	$\nabla_i \lambda_a$	$\nabla_i \lambda_\alpha$
0111	$t_{\alpha i}^a$	t_{ai}	$t_{\alpha i}$
0211	0	t_{ai}	$\hat{t}_{\alpha i}$
0212	0	t_{ai}	0
0121	$t_{\alpha i}^a$	0	$t_{\alpha i}$
0221	0	0	$\hat{t}_{\alpha i}$
0222	0	0	0

Теорема 2. *Каждая из шести индуцированных связностей имеет следующую геометрическую интерпретацию, представленную в таблице 3 при помощи параллельных перенесений оснащающих плоскостей.*

Таблица 3

Геометрическая интерпретация индуцированных связностей

Г	C_{n-m-1}	N_{m-1}
0111	$C_{n-m-1} - const$	$dN_{m-1} \subset P_{n-1}$
0211	$dC_{n-m-1} \subset P_{n-1}$	$dN_{m-1} \subset P_{n-1}$
0212	$dC_{n-m-1} \subset P_n$	$dN_{m-1} \subset P_{n-1}$
0121	$C_{n-m-1} - \text{const}$	$dN_{m-1} \subset P_n$
0221	$dC_{n-m-1} \subset P_{n-1}$	$dN_{m-1} \subset P_n$
0222	$dC_{n-m-1} \subset P_n$	$dN_{m-1} \subset P_n$

Список литературы

1. *Бондаренко Е. В.* Связности на многообразии центрированных плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во КГУ, 2000. Вып. 31. С. 12—16.

2. *Кулешов А. В.* Шесть типов индуцированной групповой связности на семействе центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2009. Вып. 40. С. 72—84.

3. *Омельян О. М.* Классификация пучков связностей, индуцированных композиционным оснащением распределения плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. Вып. 37. С. 119—127.

4. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград: Изд-во КГУ, 2000.

Об авторе

А. В. Кулешов — асп., РГУ им. И. Канта, e-mil: arturkuleshov@yandex.ru.

Author

A. V. Kuleshov — PhD student, IKSUR, e-mil: arturkuleshov@yandex.ru.