С п и с о к   л и т е р а т у р ы

1. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана.М.-Л. ГИТТЛ,1948,с.432.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-"Труды Томск.ун-та",1963,№168,с.43-53.

3. М а л а х о в с к и й В.С.,Махоркин В.В. Конгруэнции поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-Вкн .:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.4,Калининград,1974,с.86-106.

Т.Н. К о п ы т и н а

К ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ СЕТЕЙ С НЕПОДВИЖНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

В статье рассматривается пара голономных сетей в проективном пространстве P_3 ,между которыми устанавливается дифференцируемое взаимно однозначное отображение,причем одна из сетей имеет неподвижную гармоническую плоскость [1].Изучаются особенности сетей в зависимости от взаимного расположения треугольников,возникающих в гармонической плоскости.Рассмотрен случай,когда линии сети являются характеристическими [2].

1.Пусть Σ_3 —сеть с неподвижной гармонической плоскостью,описываемая точкой A, и $\{AA_i\}$ $(i=1,2,3)$-проективный репер,присоединенный к ней, AA_i-касательная к линии ω^i сети Σ_3,а в качестве A_i берем гармонический полюс соответствующей линии сети [1].

Инфинитезимальные перемещения репера определяются системой уравнений

$$dA=\omega_0^0 A+\omega^i A_i, \qquad (1)$$
$$dA_i=\omega_i^j A_j, \quad (i,j=1,2,3),$$

тогда, как известно [1], сеть Σ_3 будет определяться системой дифференциальных уравнений

$$\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k \qquad (i \neq j), \tag{2}$$

где

$$\sum_{i \neq j} a_{ij}^j = 0, \quad a_{ik}^j = a_{ki}^j, \quad (i,j,k \text{ - различны}).$$

Со второй сетью $\overline{\Sigma}_3$, описываемой точкой B, связываем репер $\{BB_i\}$ ($i=1,2,3$), где B_i есть точка пересечения касательной к линии θ^i сети $\overline{\Sigma}_3$ с неподвижной гармонической плоскостью $\pi(A)$. Отсюда

$$\begin{aligned} B &= \alpha_0^0 A + \alpha_0^i A_i, \\ B_i &= \alpha_i^j A_j. \end{aligned} \tag{3}$$

инфинитезимальные перемещения второго репера определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} dB &= \theta_0^0 B + \theta^i B_i, \\ dB_i &= \theta_i^0 B + \theta_i^j B_j. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (3) с учетом (1) и (4) следует:

$$\begin{aligned} d\alpha_0^0 &= \alpha_0^0(\theta_0^0 - \omega_0^0), \\ d\alpha_0^k &= \alpha_0^k \theta_0^0 + \omega^i \alpha_i^k - \alpha_0^0 \omega^k - \alpha_0^i \omega_i^k, \\ d\alpha_i^k &= \theta_i^j \alpha_j^k - \alpha_i^j \omega_j^k, \\ \theta_i^0 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Сеть $\overline{\Sigma}_3$ в P_3, согласно [1], будет определяться

$$\theta_i^j = b_{ik}^j \theta^k \quad (i \neq j), \tag{6}$$

где

$$b_{ik}^j = b_{ki}^j \qquad (i,j,k \text{ -различны}).$$

Дифференцируемое взаимно однозначное отображение сетей зададим так: когда точка B описывает линию θ^i сети $\overline{\Sigma}_3$, точка A описывает соответствующую линию ω^i сети Σ_3, т.е. $\omega^i = \rho^i \theta^i$. Нормированием вершин репера $\{AA_i\}$ приведем множители ρ^i к единице, тогда

$$\omega^i = \theta^i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

При этом нормировка вершин второго репера остается произвольной.

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2), (6), (7) и используя уравнения структуры проективного пространства [3], получим

$$\begin{aligned} &\Delta a_{ii}^{i+1} \wedge \omega^i - \Delta a_{i,i+1}^{i+1} \wedge \omega^{i+1} + \Delta a_{i+2,i}^{i+1} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Delta a_{ii}^{i+2} \wedge \omega^i + \Delta a_{i,i+1}^{i+2} \wedge \omega^{i+1} + \Delta a_{i,i+1}^{i+1} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Delta b_{ii}^{i+1} \wedge \omega^i + \Delta b_{i,i+1}^{i+1} \wedge \omega^{i+1} + \Delta b_{i+2,i}^{i+1} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Delta b_{ii}^{i+2} \wedge \omega^i + \Delta b_{i,i+1}^{i+2} \wedge \omega^{i+1} + \Delta b_{i,i+2}^{i+2} \wedge \omega^{i+2} = 0, \\ &\Omega_i^i \wedge \omega^i = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\Omega_i^i = \omega_0^0 - \theta_0^0 + \theta_i^i - \omega_i^i + (a_{ki}^i - b_{ki}^i)\omega^k, \qquad (k \neq i),$$

$$\Delta a_{ii}^{i+1} = a_{ii}^{i+1}(-\omega_0^0 + 2\omega_i^i - \omega_{i+1}^{i+1}) - da_{ii}^{i+1} + a_{i,i+1}^{i+1}\omega_i^{i+1} + \ldots$$

и т.д.

(если индекс $i+1>3$.то заменяем его на $i+1-3$, аналогично и для $i+2$).Замкнутая система уравнений (2),(6),(7),(8) находится в инволюции с характерами $S_1=15,\ S_2=12,\ S_3=3$, т. е. указанная выше пара определяется с произволом трех функций трех аргументов.

Пронормируем второй репер так,чтобы вершины обоих реперов были согласованы,т. е.

$$B=A+\alpha_0^i A_i,$$

$$B_i=A_i+\alpha_i^j A_j+\alpha_i^k A_k \quad (i,j,k \text{ -различны, суммирования нет!}). \tag{9}$$

Тогда $\theta_0^0=\omega_0^0$,а формы $\theta_i^i-\omega_i^i$ станут главными:

$$\theta_1^1-\omega_1^1=\alpha_1^2\omega_2^1+\alpha_1^3\omega_3^1-\alpha_2^1\theta_1^2-\alpha_3^1\theta_1^3,$$

$$\theta_2^2-\omega_2^2=\alpha_2^1\omega_1^2+\alpha_2^3\omega_3^2-\alpha_1^2\theta_2^1-\alpha_3^2\theta_2^3, \tag{10}$$

$$\theta_3^3-\omega_3^3=\alpha_3^1\omega_1^3+\alpha_3^2\omega_2^3-\alpha_1^3\theta_3^1-\alpha_2^3\theta_3^2.$$

2.Пусть $[AB]\cap\pi(A)=C$,где $C=\alpha_0^i A_i$, и точка $\mathcal{D}$ такая,что $(AB;C\mathcal{D})=-1$.

Если $dA=\omega_0^0A+\omega^iA_i$,то

$$dC=\theta_0^0C+(\omega^i\alpha_i^j-\omega^j)A_j \tag{11}$$

Обозначим d_i -символ дифференцирования в направлении линии ω^i сети Σ_3 ,тогда из (11) следует:

$$d_iC=\theta_0^0C+(\alpha_i^jA_j+\alpha_i^kA_k)\omega^i=\theta_0^0C+(B_i-A_i)\omega^i, \tag{12}$$

(i,j,k -различны,суммирования нет!).

Отсюда

$$[C,d_iC]\cap[A_iB_i]=B_i-A_i=C_i.$$

Аналогично

$$[\mathcal{D},d_i\mathcal{D}]\cap[A_iB_i]=B_i+A_i=\mathcal{D}_i.$$

Т е о р е м а.Если $(AB;C\mathcal{D})=-1$,то $(A_iB_i;C_i\mathcal{D}_i)=-1$.

В плоскости $\pi(A)$ имеем два основных треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$.Рассмотрим случай, когда $A_i=B_i$ (i-фиксировано). Это приводит к уравнениям

$$\alpha_i^j=0,\quad \alpha_i^k=0 \quad (i,j,k\text{-различны}), \tag{13}$$

и (12) дает

$$d_iC=\theta_0^0C. \tag{14}$$

Обратно,если выполняется (14),то из (12),(13) и (9) следует $A_i=B_i$.

Т е о р е м а.Треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ имеют одну общую вершину $A_i=B_i$ (i -фиксировано) тогда и только тогда, когда соответствующие линии ω^i сетей Σ_3 и Σ_3 лежат на конусе с вершиной в точке C .

Возьмем случай,когда

$$A_i=B_i,\quad A_j=B_j,\quad i\neq j \quad (i,j\text{ -фиксированы}). \tag{15}$$

Аналитически это характеризуется уравнениями (13) и

$$\alpha_j^k=0,\quad \alpha_j^i=0,\quad (k\neq i,j). \tag{16}$$

Из (11) следует,что для

$$\omega^k=0,\quad dC=\theta_0^0C. \tag{17}$$

Обратно,если верно (17),то из (11) имеем (13),(16) и (9) дают (15).

Т е о р е м а. Треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ имеют две общие соответствующие вершины $A_i=B_i$. $A_j=B_j$ (i,j -фиксированы) тогда и только тогда, когда соответствующие линии на поверхности $\omega^\kappa=0$ $(\kappa\neq i,j)$, принадлежащие сетям Σ_3 и $\overline{\Sigma}_3$, лежат на одном конусе с вершиной в точке C.

Дифференцируя (15) с учетом (1),(4),(5), получим

$$\omega^\kappa_i=\theta^\kappa_i,\quad \omega^\kappa_j=\theta^\kappa_j \quad (i,j,\kappa \text{ -различны}).$$

Откуда, используя (2),(6),(7), имеем

$$a^\kappa_{ii}=b^\kappa_{ii},\quad a^\kappa_{ij}=b^\kappa_{ij};\quad a^\kappa_{jj}=b^\kappa_{jj}.$$

С л е д с т в и е. Если $A_i=B_i$, $A_j=B_j$ (i,j - фиксированы), то для $\omega^\kappa=0$ $(\kappa\neq i,j)$ на поверхности (A) и на поверхности (B) асимптотические соответствуют.

Рассмотрим случай, когда $A_i=B_i$ ($i=1,2,3$). Из (9) и (11) следует: $dC=\theta^\circ_\circ C$ при любом перемещении точки A в пространстве. Справедливо и обратное. Доказана теорема.

Т е о р е м а. Треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ имеют одинаковые соответствующие вершины тогда и только тогда, когда точка C неподвижна при любых смещениях точки A.

Дифференцирование $A_i=B_i$ ($i=1,2,3$) с учетом (1),(4),(5) приводит к уравнениям

$$\omega^j_i=\theta^j_i. \tag{18}$$

Из (18),(7),(5) имеем:

С л е д с т в и е. Если $A_i=B_i$ ($i=1,2,3$), то сети Σ_3 и $\overline{\Sigma}_3$ проективно эквивалентны.

3. Рассмотрим случай, когда у сети $\overline{\Sigma}_3$ псевдофокусы $\overline{F}^{i+1}_i$ ($i=1,2,3$) совпадают с B_i, а прямые

$$[F^{i+1}_i\,\overline{F}^{i+1}_i]\left\{\begin{aligned} &\frac{x^{i+1}}{\alpha^{i+1}_i}=\frac{x^{i+2}}{\alpha^{i+2}_i}\\ &x^\circ=\frac{a^{i+1}_{i,i+1}}{\alpha^{i+2}_i}(x^{i+2}-\alpha^{i+2}_i x^i)\end{aligned}\right. \tag{19}$$

пересекаются в одной точке. Это приводит к условиям:

$$\alpha^2_1\alpha^3_2\alpha^1_3-\alpha^1_2\alpha^3_1\alpha^2_3=0,$$

$$a^2_{12}(\alpha^2_3-\alpha^2_1\alpha^1_3)=a^1_{31}(\alpha^2_1-\alpha^2_3\alpha^3_1), \tag{20}$$

$$a^2_{12}(\alpha^3_2-\alpha^1_2\alpha^3_1)=a^i_{23}(\alpha^3_1-\alpha^2_1\alpha^3_2),$$

где $\alpha^3_1\neq 0$, $\alpha^3_2\neq 0$.

Обозначая через $H=\alpha^2_1\alpha^3_2\alpha^1_3-\alpha^1_2\alpha^3_1\alpha^2_3$ и дифференцируя с учетом (5) получим

$$dH=(\theta^1_1+\theta^2_2+\theta^3_3-\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_3)H+K_i\omega^i. \tag{21}$$

Если δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам, то из уравнений (10) и (21) следует, что

$$\delta H=0,$$

т. е. H является инвариантом. Обращение H в нуль означает перспективность треугольников $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$. В зависимости от того, при каких условиях выполняются оставшиеся соотношения (20), можно выделить следующие основные случаи.

С л у ч а й 1. Пусть все множители отличны от нуля. Это приводит к выражениям :

$$F^3_2=\frac{\alpha^3_2-\alpha^3_1\alpha^1_2}{\alpha^3_1-\alpha^2_1\alpha^3_2}F^2_1+\frac{1}{\alpha^3_1-\alpha^2_1\alpha^3_2}(\alpha^3_1B_2-\alpha^3_2B_1),$$

$$F^1_3=\frac{\alpha^2_1\alpha^1_3-\alpha^2_3}{\alpha^3_1\alpha^2_3-\alpha^2_1}F^2_1+\frac{1}{\alpha^3_1\alpha^2_3-\alpha^2_1}(\alpha^2_3B_1-\alpha^2_1B_3),$$

и значит

$$[F^2_1F^3_2]\cap[\bar F^2_1\bar F^3_2]=\alpha^3_1B_2-\alpha^3_2B_1,$$

$$[F^2_1F^1_3]\cap[\bar F^2_1\bar F^1_3]=\alpha^2_3B_1-\alpha^2_1B_3.$$

С другой стороны, находим

$$\alpha^3_1B_2-\alpha^3_2B_1=[A_1A_2]\cap[B_1B_2],$$

$$\alpha^2_3B_1-\alpha^2_1B_3=[A_1A_3]\cap[B_1B_3].$$

Поэтому справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а. Если для сети Σ_3 $\bar F^{i+1}_i=B_i$ $(i=1,2,3)$ и прямые $[F^{i+1}_i\bar F^{i+1}_i]$ пересекаются в одной точке, то в общем случае треугольники $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ перспективны и

$$[F^2_1F^3_2]\cap[\bar F^2_1\bar F^3_2]=[A_1A_2]\cap[B_1B_2],$$

$$[F^2_1F^1_3]\cap[\bar F^2_1\bar F^1_3]=[A_1A_3]\cap[B_1B_3].$$

С л у ч а й 2. Пусть

$$a^{i+1}_{i,i+1}=0,\quad a^{i+2}_{i+1,i+2}=0,\tag{22}$$

$$\alpha^{i+1}_i-\alpha^{i+1}_{i+2}\alpha^{i+2}_i=0,\ \alpha^i_{i+1}-\alpha^{i+2}_{i+1}\alpha^i_{i+2}=0\ (i\text{-фиксировано}).\tag{23}$$

Тогда первое из уравнений (20) в силу (23) обращается в тождество. Здесь треугольники $\{A_i\},\{B_i\}$ по-прежнему перспективны, хотя точки B_i и B_{i+1} имеют специальное расположение, а именно

$$C_i\in[A_{i+1}A_{i+2}],\quad C_{i+2}\in[A_iA_{i+1}].\tag{24}$$

В силу (22), сеть Σ_3 имеет два совпавших псевдофокуса, которые совпадают с соответствующими гармоническими полюсами:

$$F^{i+1}_{i,i+1}=F^{i+2}_{i,i+2}=A_i;\quad F^{i+2}_{i+1,i+2}=F^i_{i+1,i}=A_{i+1},\tag{25}$$

(i -фиксировано).

Если же $a^{i+1}_{i,i+1}=0$ $(i=1,2,3)$, т. е. сеть Σ_3 является сетью с совпавшими псевдофокусами [4], то наше первоначальное требование о пересечении прямых $[F^{i+1}_i\bar F^{i+1}_i]$ в одной точке сводится к перспективности основных треугольников.

Если рассматривать случай, когда у сети Σ_3 псевдофокусы $\bar F^{i+1}_i,\bar F^{i+2}_i$ совпадают с точкой B_i $(i=1,2,3)$, а прямые $[F^{i+1}_i\bar F^{i+1}_i]$ и $[F^{i+2}_i\bar F^{i+2}_i]$ пересекаются в одной точке, то придем к условиям (20) и

$$a^2_{12}(\alpha^3_1\alpha^1_2-\alpha^3_2)=0,$$

$$a^2_{12}(\alpha^3_2-\alpha^1_2\alpha^3_1)=a^3_{23}(\alpha^3_2\alpha^2_1-\alpha^3_1),\tag{26}$$

$$a^2_{12}(\alpha^2_3-\alpha^2_1\alpha^1_3)=a^1_{31}(\alpha^2_3\alpha^3_1-\alpha^2_1).$$

Из уравнений (20) и (26) следует:

$$\alpha^2_1\alpha^3_2\alpha^1_3-\alpha^1_2\alpha^3_1\alpha^2_3=0,\quad a^1_{31}(\alpha^2_1-\alpha^2_3\alpha^3_1)=0,$$

$$a^3_{23}(\alpha^3_1-\alpha^3_2\alpha^2_1)=0,\quad a^2_{12}(\alpha^3_1\alpha^1_2-\alpha^3_2)=0,\tag{27}$$

$$a^2_{12}(\alpha^2_3-\alpha^2_1\alpha^1_3)=0.$$

Условия (27) будут выполняться, если имеют место соотношения (22),(23) а, следовательно, остаются в силе и (24),(25). Кроме этого, дифференцируя (9) с учетом (23),(10),(1),(4),(5), например для $i=2$, получим

$$(\alpha_1^3\alpha_3^1-1)\theta_2^3+\alpha_1^3(\alpha_1^2\alpha_2^1-1)\omega_2^1+\alpha_2^1(1-\alpha_1^3\alpha_3^1)\theta_1^3+(1-\alpha_1^2\alpha_1^2)\omega_2^3=0. \quad (28)$$

Откуда, согласно (2),(6),(22) и $b^{i+1}_{i,i+1}=0,\ b^{i+2}_{i,i+2}=0\ (i=1,2,3)$ (что вытекает из того, что сеть $\overline{\Sigma}_3$ имеет неподвижную гармоническую плоскость $\pi(A)$), следует

$$\alpha_1^3(\alpha_1^2\alpha_2^1-1)a^1_{23}=0.$$

Отсюда $a^1_{23}=0$, так как если $\alpha_1^2\alpha_2^1-1=0$ и (23) выполняются одновременно, то $B_2=\frac{1}{\alpha_1^2}B_1$ и, следовательно, вторая сеть вырождается. Напомним, кроме того, что условия (20) получены в предположении $\alpha_1^3\neq 0$.

Т е о р е м а. Если сети Σ_3 и $\overline{\Sigma}_3$ имеют общую неподвижную гармоническую плоскость, $b^{i+1}_{i,i+1}=b^{i+2}_{i,i+2}=0\ (i=1,2,3)$ и прямые, проходящие через соответствующие псевдофокусы сетей, пересекаются в одной точке, то треугольники $\{A_i\},\{B_i\}$ перспективны,

$$F^{i+1}_{i,i+1}=F^{i+2}_{i,i+2}=A_i;\quad F^{i+2}_{i+1,i+2}=F^{i}_{i+1,i}=A_{i+1}$$

(i -фиксировано)

и линии $\omega^i,\ \omega^{i+1}$ сопряжены на поверхности $\omega^{i+2}=0$, описанной точкой A.

Случай $a^{i+1}_{i,i+1}=0$ приводит просто к перспективности основных

треугольников.

Для пары сетей (2),(6),(7), где

$$b^{i+1}_{i,i+1}=b^{i+2}_{i,i+2}=0 \quad (i=1,2,3),$$

мы получаем конечные соотношения

$$\begin{aligned}&b^3_{12}b^2_{33}-b^1_{32}b^2_{11}=0,\\&b^1_{23}b^3_{11}-b^2_{13}b^3_{22}=0,\\&b^2_{31}b^1_{22}-b^3_{21}b^1_{33}=0,\end{aligned} \quad (29)$$

которые приводят к следующему:

$$b^1_{22}b^2_{33}b^3_{11}-b^1_{33}b^2_{11}b^3_{22}=0. \quad (30)$$

Левая часть уравнения (30) является инвариантом, и обращение её в нуль означает, что соприкасающиеся плоскости к линиям сети $\overline{\Sigma}_3$ проходят через одну прямую в каждой точке $B\in\overline{\Sigma}_3$.

Можно доказать, что чебышевская сеть с неподвижной гармонической плоскостью, для которой соприкасающиеся плоскости к линии сети пересекаются по одной прямой, существует с произволом трех функций одного аргумента.

4. Пусть дано отображение (7) одной сети на другую. Рассмотрим характеристические направления $\{\omega^i\}$ этого отображения. Они, как известно, находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}&(b^1_{22}-a^1_{22})(\omega^2)^2+2(b^1_{23}-a^1_{23})\omega^2\omega^3+(b^1_{33}-a^1_{33})(\omega^3)^2=k\omega^1,\\&(b^2_{11}-a^2_{11})(\omega^1)^2+2(b^2_{13}-a^2_{13})\omega^1\omega^3+(b^2_{33}-a^2_{33})(\omega^3)^2=k\omega^2,\end{aligned} \quad (31)$$

$$(b_{11}^3-a_{11}^3)(\omega^1)^2+2(b_{12}^3-a_{12}^3)\omega^1\omega^2+(b_{22}^3-a_{22}^3)(\omega^2)^2=h\omega^3, \quad (31)$$

где h – линейная дифференциальная форма. Поставим вопрос, при каком условии линия ω^i (i-фиксировано) сети Σ_3 является характеристической? Рассмотрим случай $i=1$ ($i=2,3$ по аналогии)

$$\omega^1: \quad \omega^2=\omega^3=0.$$

Из (31) следует $h=0$ и

$$b_{11}^2=a_{11}^2; \quad b_{11}^3=a_{11}^3. \quad (32)$$

Соприкасающаяся плоскость к линии ω^1 в точке A

$$\pi_2(\omega^1)=[A, A_1, a_{11}^2 A_2+a_{11}^3 A_3].$$

Отсюда

$$\pi_2(\omega^1)\cap[A_2A_3]=a_{11}^2A_2+a_{11}^3A_3.$$

Аналогично

$$\pi_2(\theta^1)\cap[B_2B_3]=b_{11}^2B_2+b_{11}^3B_3.$$

Т е о р е м а. Для того чтобы линия ω^i сети Σ_3 была характеристической, необходимо, чтобы точка $M_i=\pi_2(\omega^i)\cap[A_{i+1}A_{i+2}]$ имела в репере $\{A_i\}$ те же координаты, что и точка $N_i=\pi_2(\theta^i)\cap[B_{i+1}B_{i+2}]$ в репере $\{B_i\}$.

Возьмем случай, когда линии ω^1 и ω^2 сети Σ_3 одновременно являются характеристическими. Тогда необходимо выполняются соотношения (32) и

$$b_{22}^1=a_{22}^1; \quad b_{22}^3=a_{22}^3. \quad (33)$$

Если направление

$$\omega^3=0, \quad \omega^1=\alpha\omega^2 \quad (34)$$

также является характеристическим, то внося (32), (33), (34) в (31) получим $h=0$ и

$$\alpha(b_{12}^3-a_{12}^3)(\omega^2)^2=0. \quad (35)$$

При $\alpha=0$ имеем:

Т е о р е м а. Если в плоскости $[AA_iA_j]$ направления $[AA_i], [AA_j]$ сети Σ_3 являются характеристическими, причем таких направлений только три, то третье характеристическое направление совпадает либо с ω^i, либо с ω^j.

Когда $\alpha\neq 0$, то так как $\omega^2\neq 0$, получим из (35) $b_{12}^3=a_{12}^3$ и любое направление плоскости $[AA_1A_2]$ является характеристическим. Справедливо и обратное.

Т е о р е м а. Любое направление плоскости $[AA_iA_j]$ $\forall A\in\Sigma_3$ является характеристическим тогда и только тогда, когда линии ω^i, ω^j сети Σ_3 являются характеристическими и $b_{ij}^k=a_{ij}^k$ (i,j,k – различны).

С л е д с т в и е. Если любое направление плоскости $[AA_iA_j]$, $\forall A\in\Sigma_3$ является характеристическим, то асимптотические на поверхности (A) и поверхности (B) соответствуют.

Это вытекает из (32), (33) и $b_{ij}^k=a_{ij}^k$.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей.-"Уч.зап.Моск.гос.пед.ин-та им.В.И.Ленина,"1965, №243, с.29-37.

2. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.-"Итоги науки.Сер.Геометрия,1963."(ВИНИТИ АН СССР),М.,1965,с.65-100.

3. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана.М.-Л., ГИТТЛ,1948,с.432.

4. С т о л я р о в А.В. О некоторых свойствах плоских сетей с совпадающими псевдофокусами.-"Уч.зап.Моск.гос.пед. ин-та им.В.И.Ленина,1967,№271,с.167-180.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.6 1975

Л.Г. К о р с а к о в а

О ПАРЕ КОНГРУЭНЦИЙ КОНИК В P_3, КАСАЮЩИХСЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СВОИХ ПЛОСКОСТЕЙ В ОДНОЙ ТОЧКЕ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется пара (C_1,C_2) конгруэнций $(C_1),(C_2)$ коник, касающихся линии пересечения своих плоскостей в одной точке. Построен геометрически фиксированный репер пары (C_1,C_2), рассматриваются ассоциированные конгруэнции квадрик. Найдены условия инцидентности всех коник семейств (C_1) и (C_2) инвариантной квадрике.

§1. Пары $\mathcal{L}$.

Рассмотрим в пространстве P_3 пару (C_1,C_2) конгруэнций коник C_1, C_2 не лежащих в одной плоскости и касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей α_1 и α_2 в одной точке A_1.

Пара (C_1,C_2) называется парой $\mathcal{L}$, если плоскости α_1 и α_2 описывают двупараметрические семейства.

Отнесем пару $\mathcal{L}$ к реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, где A_2-точка, инцидентная прямой ℓ, точки A_3 и A_4 выби-