ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК:513.73

Б. Д. Чеботаревский

КАТЕГОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Современное развитие дифференциальной геометрии, по словам М.Кураниши [1], имеет тенденцию к трактовке дифференциальных уравнений в частных производных или дифференциальных операторов как геометрических объектов. Эта тенденция нашла свое отражение в работе [1], где дифференциальное уравнение (система) понимается как открытое множество $\mathcal{U}$ в пространстве струй локальных сечений некоторого расслоенного многообразия ξ вместе с локально конечно порожденным подпучком Φ идеалов пучка гладких функций на $\mathcal{U}$, а решение – как такое сечение в ξ, струя которого в каждой точке обращает все функции пучка Φ в нули. Такая трактовка оказалась плодотворной при изучении проблемы интегрируемости (Х. Гольдшмидт [2], [3]), топологических аспектов (М.Л.Громов [4]), симметрии (А.М.Виноградов [5], [6]) дифференциальных уравнений и ряда других вопросов. Использование струй Эресмана позволило рассматривать инвариантные относительно выбора системы координат понятия и операции, а применение языка теории пучков дало возможность строго разграничивать локальный и глобальный подходы. Следует, однако, отметить, что использование структуры расслоения в определении дифференциального уравнения по Кураниши предопределяет выделение привилегированного

класса адаптированных координат и распределение переменных на "независимые" и "зависимые", а это делает неестественным рассмотрение общих преобразований, которые "смешивают" переменные. Несколько в другом духе строится Т. Клейном [7] дифференциальное уравнение, определённое распределением. Для этого в многообразии $T^1_h M$ $(h, 1)$ – скоростей на M выделяется множество $RT^1_h M$ регулярных $(h, 1)$ – скоростей, в котором эффективно действует группа $GL(h, R)$. Каждое распределение h-мерных площадок на многообразии M определяет отображение M в пространство орбит $RT^1_h M / GL(h,R)$, и наоборот.

В настоящей работе предлагается новое определение дифференциального уравнения на многообразии, строится категория дифференциальных уравнений и рассматриваются некоторые их общие свойства. Все рассматриваемые многообразия, отображения и функции предполагаются из класса C^∞.

Пусть M – m-мерное многообразие, $T^k_n M = \{ j^k_0 f \mid f : R^n \to M \}$ – многообразие (n, k) - скоростей на M, $\pi^k_\ell : T^k_n M \to T^\ell_n M : j^k_0 f \longmapsto j^\ell_0 f$ - проекция, $\mathcal{D}^k(n)$ - дифференциальная группа, отображением

$$\lambda : T^k_n M \times \mathcal{D}^k(n) \to T^k_n M : (j^k_0 f, j^k_0 \varphi) \longmapsto j^k_0 (f \circ \varphi)$$

определяется на $T^k_n M$ структура правого $\mathcal{D}^k(n)$ пространства.

Под дифференциальным уравнением $\Theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$ будем понимать открытое, инвариантное относительно действия дифференциальной группы $\mathcal{D}^k(n)$, множество $\mathcal{U}$ в $T^k_n M$ вместе с локально конечно порожденным подпучком Φ идеалов функций на $\mathcal{U}$, инвариантным относительно $\mathcal{D}^k(n)$. Точки z из $\mathcal{U}$, в которых все функции из стебля Φ_z обращаются в нуль, называются интегральными струями, а их множество обозначается через $I(\Theta)$.

Будем говорить, что пара (N, τ), где N – n-мерное многообразие, $\tau : N \to M$, удовлетворяет уравнению Θ, если для каждой точки $x \in \mathcal{N}$ и некоторой карты (V, φ), содержащей точку x, $j_0^k(\tau \circ \varphi^{-1} \circ t_{\varphi(x)}) \in I(\Theta)$. Здесь $t_{\varphi(x)}: R^n \longrightarrow R^n : y \longmapsto y + \varphi(x)$ - сдвиг. Это определение не зависит от выбора карты в окрестности точки x. Легко проверить, что если пара $(\mathcal{N}, \tau)$ удовлетворяет уравнению Θ и $\bar{f}: \bar{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathcal{N}$ – диффеоморфизм, то пара $(\bar{\mathcal{N}}, \tau \circ \bar{f})$ также удовлетворяет Θ. Такие пары будем считать эквивалентными относительно дифференциального уравнения Θ, а класс эквивалентных пар назовем решением Θ.

Модифицируя подход Т.Клейна, нетрудно увидеть, что распределения и системы Пфаффа на многообразиях порождают некоторые дифференциальные уравнения в смысле нашего определения. То же можно сказать и о дифференциальных уравнениях в смысле Кураниши.

Морфизмом дифференциального уравнения $\Theta_1 = (M_1, n, k, \mathcal{U}_1, \Phi_1)$ в уравнение $\Theta_2 = (M_2, n, k, \mathcal{U}_2, \Phi_2)$ назовем отображение $\nu: M_1 \longrightarrow M_2$ такое, что $(T_n^k \nu)^{-1}(\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}_1$, $(T_n^k \nu)^* \Phi_2 \subset \Phi_1$, где $(T_n^k \nu)^* \Phi_2 = \{ \mathcal{F}_2 \circ T_n^k \nu \mid \mathcal{F}_2 \in \Phi_2 \}$ – обратный образ пучка Φ_2.

Из этого определения легко следует, что если пара $(\mathcal{N}, \tau)$ удовлетворяет уравнению Θ_1 и $\nu: \Theta_1 \longrightarrow \Theta_2$ - морфизм, то пара $(\mathcal{N}, \nu \circ \tau)$ удовлетворяет Θ_2 [8]. Множество дифференциальных уравнений с определенными выше морфизмами образует категорию.

Пусть $\mathcal{F}$ - функция, определенная на открытом множестве $\mathcal{U} \subset T_n^k M$. Определим на $(\pi_k^{k+1})^{-1}(\mathcal{U})$ функцию $\partial_i^{\#} \mathcal{F}$ равенством

$$(\partial_i^{\#} \mathcal{F})(j_0^{k+1} f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\mathcal{F}(j_0^k(f \cdot t_x)) \right)_{x=0} \quad , (1)$$

где t_x – сдвиг R^n. Пусть в локальных координатах на $T_n^{k+1} M$, ассоциированных с локальной картой (V, φ) на M, точка $j_0^{k+1} f$ определяется набором $(y^\alpha, p_i^\alpha, \ldots, p_{i_1 \ldots i_{k+1}}^\alpha)$. Тогда $(\partial_i^{\#} \mathcal{F})(j_0^{k+1} f) = \sum \partial \mathcal{F} / \partial p_{I_\ell}^\alpha \; p_{I_\ell i}^\alpha$, где сумми-

рование ведется по всем мультииндексам $I_\ell = (i_1, \ldots, i_\ell)$ и $\ell = 1, \ldots, k$. Из (1) следует, что

$$\partial_i^{\#}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) = \partial_i^{\#} \mathcal{F}_1 + \partial_i^{\#} \mathcal{F}_2 \quad , (2)$$

$$\partial_i^{\#}(\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2) = (\partial_i^{\#} \mathcal{F}_1) \cdot \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1 \cdot \partial_i^{\#} \mathcal{F}_2 \quad . (3)$$

С помощью этих формальных производных определим продолжения дифференциальных уравнений.

Пусть $\Theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$. Возьмем систему локальных порождающих Φ, скажем $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_a)$, определенных на открытом множестве $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Обозначим через $\psi(\mathcal{F})$ подпучок идеалов на $(\pi_k^{k+1})^{-1}(\mathcal{U}')$, порожденный функциями $\mathcal{F}_\sigma \circ \pi_k^{k+1}$ и $\partial_i^{\#} \mathcal{F}_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, a;\ i = 1, \ldots, n)$. В силу (2) и (3) подпучок идеалов $\psi(\mathcal{F})$ не зависит от выбора локальных порождающих $\mathcal{F}_\sigma$ для Φ. Поэтому существует локально конечно порожденный подпучок идеалов, скажем $p\Phi$, пучка функций на $(\pi_k^{k+1})^{-1}(\mathcal{U})$ такой, что при любом выборе локальных порождающих $\mathcal{F}$ для Φ ограничение $p\Phi$ на $(\pi_k^{k+1})(\mathcal{U}')$ совпадает с $\psi(\mathcal{F})$. Нетрудно проверить, что $(M, n, k+1, (\pi_k^{k+1})^{-1}(\mathcal{U}), p\Phi)$ - дифференциальное уравнение. Его будем называть продолжением уравнения Θ и обозначать $p\Theta$.

Продолжение дифференциальных уравнений - ковариантный функтор из категории DE в себя. Пара $(\mathcal{N}, \tau)$ удовлетворяет уравнению Θ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет $p\Theta$. Эти утверждения доказываются непосредственной проверкой.

Аналогично Кураниши [1] определим вполне интегрируемые и инволютивные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение $\Theta = (M, n, k, \mathcal{U}, \Phi)$ называется вполне интегрируемым в точке $z_0 \in I(\Theta)$, если $C_{z_0}(\Theta) = \{ X \in T_{z_0} T_n^k M \mid X\mathcal{F} = 0,\ \mathcal{F} \in \Phi \text{ и } d\pi_{k-1}^k(X) = 0 \} = \{0\}$; образ $I(p\Theta)$ при отображении π_k^{k+1} - окрестность точки z_0 в $I(\Theta)$ и пучок Φ полон в точке z_0. Если уравнение Θ вполне интегрируемо в точке z_0, то существует решение Θ в точке z_0 и при этом росток решений в точке z_0

единственный.

Будем говорить, что дифференциальное уравнение находится в инволюции в точке $z_0 \in I(\Theta)$, если выполнены следующие условия:

а) подпространство $C_{z_0}(\Theta)$ является инволютивным в $\{X \in T_{\pi^k_{k-1}(z_0)} T^{k-1}_n M \mid d\pi^{k-1}_{k-2}(X) = 0\} \otimes T^*_0 R^n$;

б) пучок Φ регулярен в точке z_0;

в) существует такая окрестность W точки z_0, что $W \cap I(\Theta)$ есть подмногообразие в $T^k_n M$, $((\pi^{k+1}_k)^{-1}(W)) \cap I(p\Theta)$ – подмногообразие в $T^{k+1}_n M$, $(((\pi^{k+1})^{-1}(W)) \cap I(p\Theta), W \cap I(\Theta), \pi^{k+1}_k)$ – расслоенное многообразие.

Используя связь между дифференциальными уравнения-ми в смысле Куранишн и уравнениями в смысле нашего опре-деления, нетрудно доказать аналог теоремы Картана-Келера-Лаптева-Куранишн о продолжении.

Пусть $\Theta_k = (M, n, k, U_k, \Phi_k)$ $(k \geq k_1)$ – дифференциальные уравнения, $z_k \in I(\Theta_k)$, $\pi^{k+1}_k(z_{k+1}) = z_k$, для некоторой окрестности V_{k+1} точки z_{k+1}

$$id|V_{k+1}\colon \Theta_{k+1}|V_{k+1} \longrightarrow p\Theta_k|V_{k+1}$$ – морфизм,

подпучок Φ регулярен в точке z_k.

Если существует окрестность W_k точки z_k такая, что $W_k \cap I(\Theta_k)$ – подмногообразие в $T^k_n M$, $((\pi^{k+1}_k)^{-1}(W_k)) \cap I(\Theta_{k+1})$ – подмногообразие в $T^{k+1}_n M$ и $(((\pi^{k+1}_k)^{-1}(W_k)) \cap I(\Theta_{k+1}), W_k \cap I(\Theta_k), \pi^{k+1}_k)$ – расслоенное многообразие, то существует k_2 такое, что для всех $k > k_2$ уравнение Θ_k инволютивно в точке z_k и $\Theta_{k+1} = p\Theta_k$.

Список литературы

1. Kuranishi M. Lectures on involutive systems of partial differential equations. São-Paulo, 1967.

2. Goldschmidt H. Existence Theorems for analytic linear partial differential Equations. Ann. Math., Ser. 2, 1967, 86,No.2, 246-270.

3. Goldschmidt H. Integrability criteria for systems of nonlinear partial differential equations. J. Different. Geom., 1967, 1, No. 3, 269-307.

4. Громов М.Л. Выпуклое интегрирование дифференциальных соотношений I.- Изв. АН СССР, Сер. мат., 1973, № 2 (37), 329-343.

5. Виноградов А.М. Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений.- ДАН СССР 210:1 (1973), 11-14.

6. Виноградов А.М. Теория симметрий нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Московский ун-т, 1974 (Рукопись депонирована в ВИНИТИ, от 14 ноября 1974 г.)

7. Klein T. Certain relation between vector filds and distributions on a differentiable manifold. "Cas. pestor. mat.", 1976, 101, No. 4, 370-374.

8. Чеботаревский Б.Д. Построение категории дифференциальных уравнений. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 658-76 Деп.

10 Зак. 3728