УДК 514.76

К. В. Полякова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-11

Продолжения аффинной связности и горизонтальных векторов

Рассмотрено расслоение линейных реперов над гладким многообразием. Отображение de, определяемое дифференциалами векторов репера e 1-го порядка, является лифтом в нормаль N, то есть пространство, дополняющее касательное пространство 1-го порядка до касательного пространства 2-го порядка к этому расслоению. В частности, отображение, определяемое дифференциалами вертикальных векторов этого репера, является вертикальным лифтом в нормаль N. Нормальный (вертикальный) лифт определяет нормальное (вертикальное) продолжение касательного пространства (то есть нормаль N) и его вертикального подпространства. Дифференциал произвольного векторного поля на расслоении линейных реперов является полным лифтом из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка к этому расслоению.

На расслоении базисные горизонтальные векторы играют двойную роль: во-первых, они служат операторами ковариантного дифференцирования геометрических объектов на расслоении; во-вторых, дифференциалы этих геометрических объектов можно рассматривать как формы, значения которых на базисных горизонтальных векторах дают ковариантные производные этих геометрических объектов.

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.

Для объектов, ковариантные производные которых требуют привлечения связности 2-го порядка, ковариантные производные равны значениям дифференциалов этих объектов на горизонтальных векторах в продолженной аффинной связности. Построены продолжения горизонтальных векторов, то есть горизонтальные векторы 2-го порядка для продолженной связности. Касательное пространство 2-го порядка представлено в виде прямой суммы касательного пространства 1-го порядка, вертикальных продолжений вертикального и горизонтального подпространств, горизонтального продолжения горизонтального подпространства.

Ключевые слова: тангенциальнозначные формы, касательное пространство 2-го порядка, продолжение аффинной связности, горизонтальные векторы 1-го и 2-го порядков.

1. Каноническая форма на расслоении линейных реперов

Рассмотрим над *m*-мерным гладким многообразием X_m главное расслоение касательных реперов 2-го порядка со структурными уравнениями [3]

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j , \tag{1}$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} , \tag{2}$$

$$d\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl} .$$

Структурные уравнения (1, 2) задают расслоение линейных реперов $L(X_m)$. Его типовым слоем является линейная группа $GL(m)$, действующая в касательном пространстве TX_m.

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m, а значит, и слой расслоения

$L(X_m)$. Следовательно, касательное пространство $TL(X_m)$ содержит вертикальное пространство $VL(X_m)=[e_i^j]$, касательное к слою в точке A.

Каноническая (структурная [1, с. 48]) форма на многообразии $L(X_m)$ имеет вид

$$\theta_{L(X_m)} = \omega^i e_i + \omega_j^i e_i^j \,. \tag{3}$$

Двойственным к реперу $e = \left\{e_j^i, e_k\right\}$ касательного пространства $TL(X_m) = span(e_j^i, e_k)$ является корепер $\{\omega^i, \omega_k^j\}$ пространства $T^*L(X_m)$: $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$, $\omega^i(e_j^k) = 0$, $\omega_j^i(e_k) = 0$ $\omega_j^i(e_l^k) = \delta_l^i \delta_j^k$. Пусть текущая точка многообразия X_m в некоторой окрестности определяется локальными координатами x^i (*i, j, k, … =* 1, …, *m*). Формы инвариантного корепера $\left\{\omega^i, \omega_i^j\right\}$ относительно натурального корепера $\left\{dx^i, dx_j^k\right\}$ выражаются по формулам [3]

$$\begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega_j^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_l^i & 0 \\ -x_{js}^k x_l^s & -\delta_p^k \overset{*}{x}{}_j^q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^l \\ dx_q^p \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}_j^i \end{pmatrix}$ — матрица, обратная к матрице (x_i^j), $x_{jk}^i = x_{kj}^i$. Будем считать, что все слоевые координаты $x_{jk}^i, x_{jkl}^i, \ldots$ симметричны по нижним индексам, а значит, симметричны формы

$$\omega_{jk}^i = dx_{jk}^i + x_{jk}^l \omega_l^i - x_{lk}^i \omega_j^l - x_{jl}^i \omega_k^l + (x_{jk}^m x_{ml}^i - x_{jkl}^i)\omega^l \,.$$

Векторы (точнее, векторные поля) репера $e = \left\{e_j^i, e_k\right\}$ в натуральном репере $\left\{\partial_j^i = \partial / \partial x_i^j \,,\ \partial_k = \partial / \partial x^k\right\}$ выражаются по формулам

$$e_j^i = -x_k^i \partial_j^k, \; e_k = \overset{*}{x}{}_k^j \partial_j + x_{jk}^l \, e_l^j .$$

2. Лифты векторов из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка

Векторы e_i^j, e_i репера 1-го порядка являются дифференцированиями на функциях, точнее, операторами пфаффовых производных этих функций. При этом дифференциал d переводит касательные векторы 1-го порядка в тангенциальнозначные формы со значениями в касательном пространстве порядка 2 (соприкасающемся пространстве [7]) $T^2L(X_m)$, то есть

$$d : \Omega_0^1 = TL(X_m) \to \Omega_1^2 = \Omega_1 \, (T^2L(X_m)) .$$

Вертикальные e_i^j и невертикальные e_i векторы репера 1-го порядка задают отображения [5]

$$de_i^j = -e_i^k \omega_k^j + e_{ik}^j \omega^k + e_{ik}^{jl} \omega_l^k ,$$

$$de_i = e_j \omega_i^j + e_k^j \omega_{ji}^k + e_{ij} \omega^j + e_{ij}{}^k \omega_k^j \tag{4}$$

из касательного пространства $TL(X_m) = span(e_j^i, e_k)$ в касательное пространство 2-го порядка $T^2L(X_m) = span(e_j^i,\, e_k,\, e_{ik}^j,$ $e_{ik}^{jl},\; e_{ij})$, причем $e_{ij} = e_{ji}$, $e_{ij}{}^k = e_{ji}^k$, $e_{ik}^{jl} = e_{ki}^{lj}$.

Векторы из совокупности $e' = \left\{ e_{ik}^j, e_{ik}^{jl}, e_{ij} \right\}$ через операторы частных дифференцирований выражаются по формулам

$$e_{ik}^{jl} = x_s^j \frac{\partial^2}{\partial x_s^i \partial x_p^k} x_p^l , \quad e_{ik}^j = -x_{sk}^j e_i^s + x_{pk}^q e_{iq}^{jp} - x_l^j \overset{*}{x}{}_k^s \frac{\partial^2}{\partial x_l^i \partial x^s} ,$$

$$e_{ij} = x_{ij}^k e_k + (x_{lij}^k - x_{ij}^s x_{ls}^k) e_k^l + 2x_{l(i}^k e_{|k|j)}^l + x_{sj}^k x_{pi}^q e_{kq}^{sp} + \overset{*}{x}{}_i^l \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^k} \overset{*}{x}{}_j^k .$$

Для линейного отображения $de: \ TL(X_m) \ \to \ T^2L(X_m)$ из касательного пространства 1-го порядка в касательное пространство 2-го порядка, определяемого по (4), имеем $de(e)=\dot{e}$:

$$de_i^j(e_k^l)=\dot{e}_{ik}^{jl}, \quad de_i^j(e_k)=\dot{e}_{ik}^{j}, \quad de_i(e_j^k)=\dot{e}_{ij}{}^{k}, \quad de_i(e_j)=\dot{e}_{ij}.$$

Векторы из совокупности $\dot{e}=\left\{\dot{e}_{ik}^{jl}, \dot{e}_{kj}^{l}, \dot{e}_{il}{}^{k}, \dot{e}_{ij}\right\}$ выражаются по формулам [5]

$$\dot{e}_{ik}^{jl}=e_{ik}^{jl}-\delta_k^j e_i^l, \quad \dot{e}_{ik}^{j}=e_{ik}^{j}, \quad \dot{e}_{ij}=e_{ij}+e_k^l(x_{li}^s x_{sj}^k - x_{lij}^k),$$

$$\dot{e}_{ij}{}^{k}=e_{ij}{}^{k}+\delta_i^k e_j + e_p^q(\delta_j^p x_{qi}^k - \delta_q^k x_{ji}^p - \delta_i^k x_{qj}^p)$$

и удовлетворяют сравнениям на базе $L(X_m)$

$$d\dot{e}_{ik}^{j} \cong \dot{e}_{is}^{jl}\omega_{lk}^{s}, \quad d\dot{e}_{ik}^{jl} \cong 0, \quad d\dot{e}_{ij} \cong \dot{e}_{il}{}^{k}\,\omega_{kj}^{l} + \dot{e}_{kj}^{l}\omega_{li}^{k}, \quad d\dot{e}_{ij}{}^{k} \cong \dot{e}_{sj}^{lk}\omega_{li}^{s}.$$

Векторы 2-го порядка образуют подпространство $N=span(\dot{e}_{ik}^{jl}, \dot{e}_{kj}^{l}, \dot{e}_{il}{}^{k}, \dot{e}_{ij})$, не содержащее векторы 1-го порядка, то есть $T^2L(X_m) \ = \ TL(X_m)\oplus N$. Подпространство N является *нормалью 1-го порядка*. Векторы из совокупности $\dot{e}$ назовем *нормальными векторами*, а репер $\dot{e}^2=\{e,\dot{e}\}$ — *нормальным репером 2-го порядка*.

Для векторов репера $e=\left\{e_j^i, e_k\right\}$ и их дифференциалов $de=\left\{de_j^i, de_k\right\}$ имеем

$$L(X_m)\xrightarrow{\ e\ }TL(X_m)\xrightarrow{\ de\ }N=T^2L(X_m)\setminus TL(X_m).$$

Отображение $de=\left\{de_j^i, de_k\right\}$ (4) является лифтом отображения *e*; будем называть его *лифтом в нормаль N* (*нормальным лифтом)*, отображение de_j^i — *вертикальным лифтом в* *нормаль N*. Лифт $de=\{de^i_j, de_k\}$ позволяет строить продолжение касательного пространства $TL(X_m)$ и его вертикального подпространства $VL(X_m)=[e^j_i]$ в нормаль

$$N=T^2L(X_m)\setminus TL(X_m).$$

Нормаль N содержит подпространства

$$^vV=span(\dot e^{jl}_{ik}),\quad ^vT=span(\dot e^{jl}_{ik},\dot e^{\,l}_{kj}),\quad ^nV=span(\dot e^{jl}_{ik},\dot e_{il}^{\;k});$$

$$^vV={}^vT\cap{}^nV.$$

Теорема 1. *Нормальный лифт* de *определяет:*

1) нормаль N, то есть продолжение ^nT *пространства* $TL(X_m)$*,*

$$de\colon TL(X_m)\to N=span(\dot e^{jl}_{ik},\dot e^{\,l}_{kj},\dot e_{il}^{\;k},\dot e_{ij})={}^nT\subset T^2L(X_m);$$

2) продолжение ^nV *пространства* $VL(X_m)$

$$de\colon VL(X_m)\to{}^nV=span(\dot e^{jl}_{ik},\dot e_{il}^{\;k})\subset N\subset T^2L(X_m).$$

Теорема 2. *Вертикальный лифт* de^i_j *определяет:*

1) вертикальное продолжение ^vT *пространства* $TL(X_m)$

$$de^i_j\colon TL(X_m)\to{}^vT=span(\dot e^{jl}_{ik},\dot e^{k}_{il})\subset N\subset T^2L(X_m);$$

2) вертикальное продолжение ^vV *пространства* $VL(X_m)$

$$de^i_j\colon VL(X_m)\to{}^vV=span(\dot e^{jl}_{ik})\ \subset N\subset T^2L(X_m).$$

Для произвольного вектора $u=u^ie_i+u^i_je^j_i\in TL(X_m)$ функции u^i, u^i_j удовлетворяют уравнениям

$$du^i=u^i_{,j}\omega^j+u^{i,k}_{,j}\omega^j_k,\quad du^i_j+u^k\omega^{\,i}_{jk}-u^i_k\omega^k_j=u^i_{j,k}\omega^k+u^{i,l}_{j,k}\omega^k_l,$$

следовательно, $u^i = u^i(x^j, x^k_l)$, $u^i_j = -u^k x^i_{jk}$. При отображении $d: TL(X_m) \to \Omega_1(T^2L(X_m))$ получим

$$du = \hat{u}_i \omega^i + \hat{u}^i_j \omega^j_i\ , \tag{5}$$

где

$$\hat{u}_i = u^j_i e_j + u^k_{ji} e^j_k + u^j e_{ji} + u^k_j e^j_{ki}\ ,\text{-}$$

$$\hat{u}^i_j = u^{ki}_j e_k + u^{ki}_{lj} e^l_k + u^k (e^i_{kj} + \delta^i_k e_j) + u^k_l (e^{li}_{kj} - \delta^l_j e^i_k)\,.$$

Теорема 3. *Пусть* $u: L(X_m) \to TL(X_m)$ *— векторное поле на* $L(X_m)$. *Тогда дифференциал отображения и является полным лифтом* $du: TL(X_m) \to T^2L(X_m)$ *из касательного пространства* $TL(X_m)$ *в касательное пространство 2-го порядка* $T^2L(X_m)$*, то есть*

$$du:\ v \in TL(X_m)\ \to\ {}^l v = \hat{u}_i v^i + \hat{u}^i_j v^j_i\ \in\ T^2L(X_m)\,;$$

$${}^l v = du(v) = e_i (u^i_j v^j + u^{ik}_j v^j_k + u^j v^i_j) + e^j_i (u^i_{kj} v^k + u^{ik}_{jl} v^l_k - u^i_k v^k_j) +$$

$$+ e^{jl}_{ik} u^i_j v^k_l + e^j_{ik} (u^i_j v^k + u^k v^i_j) + e_{ij} v^i u^j\,.$$

3. Горизонтальные векторы и ковариантные производные

Зададим аффинную связность в расслоении $L(X_m)$ касательных линейных реперов способом Лаптева — Лумисте [8] с помощью форм $\tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk} \omega^k$, причем компоненты объекта аффинной связности Γ^i_{jk} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l} \omega^l\,. \tag{6}$$

Вносся в структурные уравнения (1, 2) формы связности $\widetilde{\omega}_j^i$, получим структурные уравнения Э. Картана:

$$\mathrm{D}\omega^i = \Theta^i, \quad \mathrm{D}\widetilde{\omega}_j^i = \Omega_j^i, \tag{7}$$

где $\Theta^i = T_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k$, $\Omega_j^i = R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l$ — *формы кручения и кривизны*, D — символ внешнего ковариантного дифференциала:

$$\mathrm{D}\omega^i = d\omega^i + \omega^j \wedge \widetilde{\omega}_j^i, \quad \mathrm{D}\widetilde{\omega}_j^i = d\widetilde{\omega}_j^i - \widetilde{\omega}_j^k \wedge \widetilde{\omega}_k^i.$$

Объекты кручения T_{jk}^i и кривизны R_{jkl}^i являются тензорами на базе X_m и выражаются по формулам

$$T_{jk}^i = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i), \quad R_{jkl}^i = \Gamma_{j[k,l]}^i - \Gamma_{j[k}^s \Gamma_{sl]}^i.$$

Дифференцируя уравнения (7) внешним образом, найдем тождества Бьянки в *бескоординатном индексном* представлении:

$$\mathrm{D}\Theta^i = \Omega_j^i \wedge \omega^j, \quad \mathrm{D}\Omega_j^i = 0, \tag{8}$$

где $\mathrm{D}\Theta^i = d\Theta^i + \Theta^j \wedge \widetilde{\omega}_j^i$, $\mathrm{D}\Omega_j^i = d\Omega_j^i + \Omega_j^k \wedge \widetilde{\omega}_k^i - \Omega_k^i \wedge \widetilde{\omega}_j^k$ — внешние ковариантные дифференциалы форм кручения и кривизны.

Отображение $dR_g = (d - \omega_j^i de_i^j)\Big|_{\omega^i = 0}$ [6] осуществляет действие структурной группы в расслоении $TL(X_m)$, при этом уравнения инфинитезимального действия группы [10] для касательных векторов имеют вид

$$dR_g(e_i) = e_j \overline{\omega}_i^j + e_k^j \overline{\omega}_{ji}^k, \quad dR_g(e_i^j) = 2e_k^j \overline{\omega}_i^k,$$

$$dR_g(u) = [(u_j^{ki} + \delta_j^k u^i)e_k + (u_{lj}^{ki} - u_j^k \delta_l^i + u_l^i \delta_j^k)e_k^l]\overline{\omega}_i^j,$$

где формы $\overline{\omega} = \omega\Big|_{\omega^i = 0}$ являются структурными формами линейной группы $GL(m)$ расслоения $L(X_m)$.

Для произвольного вертикального вектора $v = u^i_j e^j_i$ координаты u^i и их пфаффовы производные u^{ik}_j равны нулю, и отображение dR_g переводит вертикальные векторы в вертикальные $dR_g(v) = (u^{ki}_{lj} - \delta^i_l u^k_j + \delta^k_j u^i_l)\overline{\omega}_i^{\,j} e^l_k$.

В аппарате, основанном на применении тангенциальнозначных форм, понятие инвариантности векторов и подпространств удобно определять следующим образом. Подпространство $L = span(u)$ является *инвариантным относительно отображения f*, если образ векторов *u* представляет собой векторнозначную 1-форму со значениями в подпространстве L, то есть $f(u) \in \Omega_1(L)$.

Применяя действие оператора $dR_g = (d - \omega^i_j de^j_i)\Big|_{\omega^i = 0}$ к векторам $\widetilde{e}_k = e_k + \Gamma^i_{jk} e^j_i$, аннулирующим формы связности, получим $dR_g(\widetilde{e}_k) = (d - \omega^i_j de^j_i)(\widetilde{e}_k)\Big|_{\omega^i = 0} = \widetilde{e}_i \pi^i_k$. Следовательно, *горизонтальные* векторы $\widetilde{e}_k$ инвариантны в совокупности.

На расслоении $Y \to X$ определены формы различных типов. Форма является *горизонтальной* (*вертикальной*), если она аннулируется вертикальными (горизонтальными) векторами. Форма является *горизонтальнозначной* (*HY-значной*), если она принимает значения в горизонтальном подпространстве *HY*. Форма является *вертикальнозначной* (*VY-значной*), если она принимает значения в вертикальном подпространстве *VY*. Например, горизонтальные вертикальнозначные формы — это формы $Y \to T^*X \otimes VY$; горизонтальные горизонтальнозначные формы — это $Y \to T^*X \otimes HY$.

Рассмотрим следующие тангенциальнозначные формы на многообразии $L(X_m)$ с привлечением векторов $\widetilde{e}_i$, e^j_k пространства $TL(X_m)$:

$\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \widetilde{e}_i \omega^i \in HL(X_m) \otimes T^* X_m \subset \Omega_1 \, (HL(X_m))$ — горизонтальнозначная горизонтальная 1-форма связности;

$\overset{v}{\widetilde{\omega}} = e_i^j \widetilde{\omega}_j^i \in VL(X_m) \otimes V^* L(X_m) \subset \Omega_1 \, (VL(X_m))$ — вертикальнозначная вертикальная 1-форма связности;

$\Theta = \widetilde{e}_i \Theta^i \in HL(X_m) \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m \subset \Omega_2 \, (HL(X_m))$ — горизонтальнозначная горизонтальная 2-форма кручения;

$\Omega = e_i^j \Omega_j^i \in VL(X_m) \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m \subset \Omega_2 \, (VL(X_m))$ — вертикальнозначная горизонтальная 2-форма кривизны.

Используя введенные тангенциальнозначные формы, структурные уравнения (7) и тождества (8) на многообразии $L(X_m)$ можно записать в *бескоординатном безындексном* виде:

$$\mathrm{D}\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \Theta, \quad \mathrm{D}\overset{v}{\widetilde{\omega}} = \Omega; \quad \mathrm{D}\Theta = [\Omega, \overset{h}{\widetilde{\omega}}], \quad \mathrm{D}\Omega = 0. \tag{9}$$

Действительно, справедливо

$$\mathrm{D}\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \widetilde{e}_i \mathrm{D}\omega^i = \widetilde{e}_i \Theta^i = \Theta, \; \mathrm{D}\overset{v}{\widetilde{\omega}} = e_i^j \mathrm{D}\widetilde{\omega}_j^i = e_i^j \Omega_j^i = \Omega,$$

$$\mathrm{D}\Omega = e_i^j \mathrm{D}\Omega_j^i = 0.$$

Коммутатор векторнозначных 1-форм $\overset{1}{\vartheta}$ и $\overset{2}{\vartheta}$ выражается по формуле (см., напр., [2, с. 135]):

$$[\overset{1}{\vartheta}, \overset{2}{\vartheta}] = [X_i \overset{1}{\vartheta}{}^i, Y_j \overset{2}{\vartheta}{}^j] = [X_i, Y_j] \overset{1}{\vartheta}{}^i \wedge \overset{2}{\vartheta}{}^j.$$

Поэтому

$$\mathrm{D}\Theta = \widetilde{e}_i \mathrm{D}\Theta^i = \Omega_j^i \wedge \omega^k \delta_k^j \widetilde{e}_i = \Omega_j^i \wedge \omega^k [e_i^j, \widetilde{e}_k] = [\Omega, \overset{h}{\widetilde{\omega}}].$$

Замечание. Все рассмотренные выше тангенциальнозначные формы заданы в репере $e = \{e_j^i, \widetilde{e}_k\}$ касательного пространства $TL(X_m)$, но тождества (9) также выполняются, если вместо горизонтальных векторов $\widetilde{e}_k$ рассматривать касательные векторы $\varepsilon_k = \overset{*}{x}{}^j_k \partial_j$ из пространства TX_m. Принято использовать в (9) каноническую форму $\omega = \varepsilon_i \omega^i \in TX_m \otimes T^* X_m$ многообразия X_m вместо горизонтальной горизонтальнозначной формы $\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \widetilde{e}_i \omega^i \in HL(X_m) \otimes T^* X_m$. Также обычно используют форму $\Theta = \varepsilon_i \Theta^i \in TX_m \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m$ вместо горизонтальнозначной формы кручения $\Theta = \widetilde{e}_i \Theta^i \in HL(X_m) \otimes \overset{2}{\wedge} T^* X_m$.

Лемма 1. *Внешний ковариантный дифференциал канонической формы* θ *равен сумме форм кручения и кривизны* $\mathrm{D}\theta = \Theta + \Omega$.

Действительно, раскладывая каноническую форму на вертикальный $\overset{v}{\widetilde{\omega}}$ и горизонтальный $\overset{h}{\widetilde{\omega}}$ проекторы, то есть

$$\theta = e_i^j \widetilde{\omega}_j^i + \widetilde{e}_i \omega^i = \overset{v}{\widetilde{\omega}} + \overset{h}{\widetilde{\omega}},$$

получим $\mathrm{D}\theta = \mathrm{D}\overset{v}{\widetilde{\omega}} + \mathrm{D}\overset{h}{\widetilde{\omega}} = \Theta + \Omega$.

Лемма 2. *Скобка горизонтальных форм связности равна сумме ее форм кручения и кривизны, то есть* $[\overset{h}{\widetilde{\omega}}, \overset{h}{\widetilde{\omega}}] = \Theta + \Omega$.

Действительно,

$$[\overset{h}{\widetilde{\omega}}, \overset{h}{\widetilde{\omega}}] = [\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j]\omega^i \wedge \omega^j = \widetilde{e}_i T^i_{kl} \omega^i \wedge \omega^j + e_i^j R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l = \Theta + \Omega.$$

4. Продолжение аффинной связности и горизонтальных векторов

Зададим формы [3, с. 167; 7]

$$\widetilde{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \Gamma^i_{jkl}\omega^l;$$

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{sl}\omega^s_{jk} + \Gamma^s_{jl}\omega^i_{sk} + \Gamma^s_{kl}\omega^i_{js} + \omega^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl,s}\omega^s.$$

Объект аффинной связности 2-го порядка $\Gamma^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jkl}\}$ задает связность в расслоении реперов 2-го порядка.

Ковариантные производные объекта связности Γ^i_{jk} относительно аффинной связности 2-го порядка $\overset{2}{\Gamma}$ выражаются по формуле

$$\overset{2}{\nabla}_l \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl} - \Gamma^i_{jkl} \qquad (10)$$

и образуют самостоятельный тензор на многообразии X_m, то есть $\Delta\left(\overset{2}{\nabla}_l \Gamma^i_{jk}\right) \equiv 0$. Альтернируя ковариантные производные (10) по k и l, получим

$$\overset{2}{\nabla}_{[l} \Gamma^i_{jk]} = R^i_{jkl} + \Gamma^i_{js}T^s_{kl} - T^i_{jkl}.$$

Объект $T^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{jl]}$ в совокупности с объектом T^s_{kl} образует *кручение аффинной связности 2-го порядка* $T^2 = \{T^i_{jk}, T^i_{jkl}\}$ [9]. Кручение 2-го порядка T^2 является тензором: $\Delta T^i_{jkl} \equiv -T^s_{kl}\omega^i_{js}$.

В аффинной связности 1-го порядка производные тензора Q по направлению базисных горизонтальных векторов совпадают с образами горизонтальных векторов при линейном отображении, определенном дифференциалом этого тензора, то есть $\partial_{\tilde{e}_k} Q = dQ(\tilde{e}_k)$, и это суть ковариантные производные тензора Q в связности Γ^i_{jk}. Для ковариантных производных $\nabla_i u = \hat{u}_i + \hat{u}^k_j \Gamma^j_{ki}$ произвольного вектора $u = u^i e_i + u^i_j e^j_i$ касательного пространства 1-го порядка $TL(X_m)$ справедливы равенства $\nabla_i u = \partial_{\tilde{e}_i} u = du(\tilde{e}_i)$. В частности, для ковариантных производных базисных векторов 1-го порядка (вертикальных и горизонтальных) справедливо

$$\nabla_l e^i_j = \partial_{\tilde{e}_l} e^i_j = de^i_j(\tilde{e}_l), \quad \nabla_l \tilde{e}_k = d\tilde{e}_k(\tilde{e}_l) = \partial_{\tilde{e}_l} \tilde{e}_k.$$

В связности 2-го порядка аналогичное выполняется, в частности, для самого объекта аффинной связности Γ^i_{jk}:

$$\nabla^2_l \Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = \partial_{\widetilde{e}_l} \Gamma^i_{jk}, \tag{11}$$

если

$$\omega^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = \Gamma^i_{jkl}. \tag{12}$$

Формы ω^i_{jk} и горизонтальные векторы $\widetilde{e}_l$ порождают основной объект Γ^i_{jkl} аффинной связности 2-го порядка.

Равенства (12) и (11) имеют место, если

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl} = x^s_{jk} x^i_{sl} - x^i_{jkl} + x^s_{jk} \Gamma^i_{sl} - x^i_{sk} \Gamma^s_{jl} - x^i_{js} \Gamma^s_{kl}.$$

Связность $\overset{0}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl}\}$ является *продолженной связностью 2-го порядка*, а компоненты $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl}$ — *продолжением* связности Γ^i_{jk} [4].

Теорема 4 [4]. *Ковариантные производные объекта связности Γ^i_{jk} в продолженной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^2$ являются образами горизонтальных векторов при линейных отображениях, определенных дифференциалами объекта, а также производными по направлению горизонтальных векторов $\widetilde{e}_l$, то есть справедливы равенства*

$$\overset{0}{\nabla}{}^2_l \Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk}(\widetilde{e}_l) = \widetilde{e}_l(\Gamma^i_{jk}).$$

Теорема 5. *Нормальный лифт $de = \left\{de^i_j, de_k\right\}$ (4) порождает горизонтальные векторы 2-го порядка для продолженной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^2 = \{\Gamma^i_{jk}, \overset{0}{L}{}^i_{jkl}\}$, то есть*

$$de:\ \widetilde{e} = \{\widetilde{e}_k\} \in HL(X_m) \to {}^n\widetilde{e} = span(\widetilde{e}^i_{jk}, \widetilde{e}_{ik}) \in {}^nHL(X_m).$$

Применяя отображения de_j^i, de_k к горизонтальным векторам $\widetilde{e}_k$, получим *продолжения горизонтальных векторов* $\widetilde{e}_k$, то есть *горизонтальные векторы 2-го порядка для продолженной связности* [5; 11]

$$\widetilde{e}_{jk}^i = de_j^i(\widetilde{e}_k) = e_{jk}^i - e_j^l \Gamma_{lk}^i + e_{jl}^{is} \Gamma_{sk}^l,$$

$$\widetilde{e}_{jk} = de_j(\widetilde{e}_k) = e_{jk} + e_{jl}^s \Gamma_{sk}^l + e_l \Gamma_{jk}^l + e_s^l \Gamma_{ljk}^s,$$

причем инвариантными на $L(X_m)$ являются совокупности векторов $\{\widetilde{e}_{jk}^i\}$, $\{\widetilde{e}_{jk}^i, \widetilde{e}_{jk}\}$.

В частности, отображение

$$de_j^i : \widetilde{e} = \{\widetilde{e}_k\} \in HL(X_m) \to {}^v\widetilde{e} = span(\widetilde{e}_{jk}^i) \in {}^vHL(X_m)$$

порождает вертикальное продолжение ${}^v\widetilde{e} = span(\widetilde{e}_{jk}^i)$ горизонтальных векторов, то есть пространство ${}^vHL(X_m)$.

Отображение [11]

$$d\widetilde{e}_k : \widetilde{e} = \{\widetilde{e}_l\} \in HL(X_m) \to {}^h\widetilde{e} = span(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl}) \in {}^hHL(X_m)$$

порождает горизонтальное продолжение ${}^h\widetilde{e} = span(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl})$ горизонтальных векторов, где

$$\widetilde{\widetilde{e}}_{kl} = d\widetilde{e}_k(\widetilde{e}_l) = \widetilde{e}_{kl} + \Gamma_{jk}^i \widetilde{e}_{il}^j + \nabla_l \Gamma_{jk}^i e_i^j,$$

причем $\widetilde{\widetilde{e}}_{[kl]} = R_{jkl}^i e_i^j + T_{kl}^i \widetilde{e}_i$.

Утверждение. *Для касательного пространства 2-го порядка* $T^2L(X_m)$ *справедливо разложение*

$$T^2L(X_m) = TL(X_m) \oplus {}^vVL(X_m) \oplus {}^vHL(X_m) \oplus {}^hHL(X_m),$$

где

$$TL(X_m) = span(e_j^i, \widetilde{e}_k), \quad {}^vVL(X_m) = span(\dot{e}_{jl}^{ik}),$$

$${}^vHL(X_m) = span(\widetilde{e}_{jk}^i), \quad {}^hHL(X_m) = span(\widetilde{\widetilde{e}}_{kl}).$$

Действительно, для горизонтального пространства 2-го порядка ${}^{n}HL(X_m)$ имеем

$$ {}^{n}HL(X_m) = {}^{v}HL(X_m) \oplus {}^{h}HL(X_m) . $$

Принимая во внимание

$$ T^2 L(X_m) = TL(X_m) \oplus N , \quad N = {}^{v}VL(X_m) \oplus {}^{n}HL(X_m) , $$

получаем требуемое разложение.

Список литературы

1. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

2. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.

3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С.139—189.

4. *Полякова К. В.* Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 114—128.

5. *Полякова К. В.* О задании аффинной связности 2-го порядка векторнозначными формами 1-го, 2-го и 3-го порядков // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 108—125.

6. *Полякова К. В.* О действии структурной группы главного расслоения в его касательном пространстве // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 73—85.

7. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки, 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

8. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.

9. *Janyska J., Kolář I.* On the connections naturally induced on the second order frame bundle // Archivum Mathematicum. 1986. Vol. 22, №1. P. 21—28.

10. *Kolář I., Vitolo R.* Absolute contact differentiation on submanifolds of Cartan space // Diff. Geom. and its Appl. 2010. Vol. 28, iss. 1. P. 19—32.

11. *Polyakova K. V.* Prolongations generated by horizontal vectors // J. Geom. 2019. №110. P. 53.

K. V. Polyakova[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-11

Prolongations of affine connection and horizontal vectors

Submitted on April 30, 2020

The linear frame bundle over a smooth manifold is considered. The mapping *de* defined by the differentials of the first-order frame *e* is a lift to the normal *N*, i. e., a space complementing the first-order tangent space to the second-order tangent space to this bundle. In particular, the mapping defined by the differentials of the vertical vector of this frame is a vertical lift into normal *N*.

The lift *de* allows us to construct a prolongation both of the tangent space and its vertical subspace into the second-order tangent space, more precisely into the normal *N*. The normal lift *de* defines the normal prolongation of the tangent space (i. e. the normal *N*) and its vertical subspace. The vertical lift defines the vertical prolongation of the tangent space and its vertical subspace. The differential of an arbitrary vector field on the linear frame bundle is a complete lift from the first-order tangent space to the second-order tangent space to this bundle.

It is known that the action of vector fields as differential operators on functions coincides with action of the differentials of these functions as 1-forms on these vector fields. Horizontal vectors played a dual role in the fibre bundle. On the one hand, the basic horizontal vectors serve as operators for the covariant differentiation of geometric objects in the bundle. On the other hand, the differentials of these geometric objects can be considered as forms (including tangential-valued ones) and their values on basic horizontal vectors give covariant derivatives of these geometric objects.

For objects which covariant derivatives require the second-order connection, the covariant derivatives are equal to the values of the differentials of these objects on horizontal vectors in prolonged affine connectivity. Prolongations of the basic horizontal vectors, i. e., the second-order horizontal vectors for prolonged connection, were constructed. The sec-

ond-order tangent space is represented as a straight sum of the first-order tangent space, vertical prolongations of the vertical and horizontal subspaces, and horizontal prolongation of the horizontal subspace.

Keywords: tangent-valued forms, second-order tangent space, prolongation of affine connection, covariant derivatives, first- and second-order horizontal vectors.

References

1. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

2. *Sulanke, R., Wintgen, P.:* Differentialgeometrie und faserbundel. Birkhauser, Basel (1972).

3. *Laptev, G. F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

4. *Polyakova, K. V.:* Special affine connection of the 1st and 2nd orders. DGMF. Kaliningrad. 46, 114—128 (2015).

5. *Polyakova, K. V.:* Vector-valued forms of the 1st, 2nd and 3rd orders for affine connection of the 2nd order. DGMF. Kaliningrad. 47, 108—125 (2016).

6. *Polyakova, K. V.:* On action of structure group of principal fibre bundle in its tangent space. DGMF. Kaliningrad. 48, 73—85 (2017).

7. *Rybnikov, A. K.:* Affinee connections of second order. Math. Notes, **29**:2, 143—149 (1981).

8. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev and Lumiste methods for the specication of a connection in a principal bundle. DGMF. Kaliningrad. 37, 179—187 (2006).

9. *Janyska, J., Kolář, I.:* On the connections naturally induced on the second order frame bundle. Archivum Mathematicum, **22**:1, 21—28 (1986).

10. *Kolář, I., Vitolo, R.:* Absolute contact differentiation on submanifolds of Cartan space. Differential Geometry and its Applications, **28**:1, 19—32 (2010).

11. *Polyakova, K. V.:* Prolongations generated by horizontal vectors. J. Geom., 110, 53 (2019).