УДК 160.1

КАНТ, ГЁДЕЛЬ И ПРОБЛЕМА СИНТЕТИЧЕСКИХ СУЖДЕНИЙ АПРИОРИ[1]

А. Г. Пушкарский*

Споры вокруг знаменитого положения Канта о существовании априорных синтетических суждений в математике, выдвинутого им в «Критике чистого разума», не утихают на протяжении более двух столетий. С одной стороны, это положение подверглось резкой критике приверженцев неопозитивизма в начале XX века. С другой — идеи Канта о конструктивной природе математики послужили философской основой программы интуиционизма Л. Э. Я. Брауэра в основаниях математики. Небезынтересными в данном вопросе оказываются идеи великого логика и математика Курта Гёделя об аналитичности математики, высказанные им в ряде работ, посвященных философии математики. Хотя он нигде и не упоминает априорные синтетические суждения, ход его размышлений об аналитических суждениях близок к кантовскому. Примечательным является и то, что уже в середине прошлого века теоремы Гёделя о неполноте, а также работы Чёрча и Тьюнинга, с ними связанные, послужили аргументами в защиту существования синтетических суждений априори. Первым, кто прибегнул для этого к помощи теоремы Гёделя о неполноте, стал американский логик Ирвинг Копи. Хотя его небольшая работа осталась практически не замеченной, подобные идеи высказывались еще как минимум двумя математиками. В современной математике, в частности в теории типов Мартина-Лёфа, существование априорных синтетических истин считается вполне оправданным, хотя и по другим основаниям, но тоже связанным с гёделевыми результатами.

Проведенный анализ обоснований в пользу существования априорных синтетических высказываний демонстрирует то, что решение этой проблемы зависит от явно или не-

[1] Исследование подготовлено при поддержке фонда РФФИ, грант №17-03-00707а.
* Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта,
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14.
Поступила в редакцию: 11.05.2017 г.
doi: 10.5922/0207-6918-2017-3-3

явно принимаемого образа логики, ключевым параметром которого, по нашему мнению, является предмет логики или, иначе говоря, представления о природе логического и, соответственно, о границах логики и математики.

Ключевые слова: *Кант, априорные синтетические суждения, теоремы Гёделя о неполноте, образ логики.*

…если неверное понимание Канта уже привело к тому, что представляет интерес в философии и, косвенным образом, в науке, чего мы можем ожидать от правильно понятого Канта?

Курт Гёдель

В этом году исполняется 230 лет со времени выхода в свет второго издания «Критики чистого разума» Иммануила Канта. Этот труд признается всеми как одно из самых значительных философских произведений, он занимает особое место в философии логики и математики. Сам Кант очень кратко определил главную задачу своего трактата следующим образом: «Истинная же задача чистого разума заключается в следующем вопросе: как возможны априорные синтетические суждения?» (Кант, 1964, с. 117).

В чем заключается учение Канта об аналитических и синтетических суждениях? Он делит все знание на априорное, то есть независимое от опыта, и апостериорное, то есть знание, полученное эмпирически. Соответственно, все суждения, в которых выражается любое знание, следует разделить на априорные и апостериорные. Априорные суждения не зависят от опыта и обладают безусловной всеобщностью и необходимостью. Например, суждение «Квадрат имеет четыре угла» будет, по Канту, априорным, а суждение «Сегодня на улице солнечная погода» — апостериорным. Более того, деление суждений на аналитические и синтетические будет основополагающим для структуры любого познания, поскольку «это деление необходимо в отношении критики человеческого рассудка, а потому заслуживает быть в ней *классическим*» (Кант, 1965, с. 86). По Канту, аналитические суждения «высказывают в предикате только то, что уже действительно мыслилось в понятии субъекта, хотя не столь ясно и не с таким же сознанием» (Кант, 1965, с. 80), а синтетические суждения «присоединяют к понятию субъекта предикат, который вовсе не мыслился в нем и не мог бы быть извлечен из него никаким расчленением» (Кант, 1964, с. 111). Отсюда структуру аналитических суждений можно изобразить следующим образом:

$$S\,\{S_1\&S_2\&\ldots\,\&S_n\} \text{ есть } P \text{ — истинно, если и только если } P = S_i,$$

где S — понятие субъекта; $S\,\{S_1\&S_2\&\ldots\,\&S_n\}$ — основное содержание понятия субъекта, представляющее собой конъюнкцию конечного числа признаков; P — понятие предиката; S_i — признак, входящий в основное содержание понятия субъекта ($1 \le i \le n$). Тогда истинное аналитическое суждение принимает вид А = А, а ложное, в свою очередь, А = ¬А. Отсюда Кант делает вывод, что «необходимо признать, что закон противоречия есть всеобщий и вполне достаточный принцип всякого аналитического знания…» (Кант, 1964, с. 230), который он формулирует следующим образом: «Ни одной вещи не присущ предикат, противоречащий ей» (Кант, 1964, с. 229).

Однако «далее этого его значение и пригодность как достаточного критерия истины не простираются» (Кант, 1964, с. 230). Все аналитические суждения — априорные, а все апостериорные — очевидно синтетические. Истинность апостериорного синтетического суждения нельзя установить, сопоставляя содержания понятий субъекта и предиката. Для этого необходимо эмпирическое созерцание. Поэтому, по Канту, основанием синтетических суждений не могут быть логические законы тождества и противоречия. Их высший принцип Кант формулирует следующим образом: «Всякий предмет подчинен необходимым условиям синтетического единства многообразного [содержания] созерцания в возможном опыте» (Кант, 1964, с. 234). Однако все ли синтетические суждения апостериорны? Цель «Критики чистого разума» — как раз показать, как возможны априорные синтетические суждения.

По мнению Канта, априорными синтетическими суждениями являются математические суждения и суждения чистого естествознания. А вот в метафизике их существование проблематично. С точки зрения философа, математические суждения являются синтетическими, так как дают нам новые знания, и априорными, поскольку не имеют отношения к эмпирическому опыту, а относятся к его чистым и априорным формам, то есть к априорным формам интуиции, внутренней — к времени (арифметика) и внешней — к пространству (геометрия). Кант в «Критике чистого разума» приводит примеры таких суждений, ставшие знаменитыми: «7 + 5 = 12»; «Прямая линия — кратчайшее расстояние между двумя точками». Математика, таким образом, имеет дело с конструированием своих понятий и объектов в чистом созерцании, то есть в чистых априорных формах чувственности: «Математическое знание есть познание посредством конструирования понятий» (Кант, 1964, с. 600).

На протяжении двух столетий не утихают споры по поводу проведения дистинкций априори/апостериори и аналитическое/синтетическое. А от их решения зависит проблема существования априорных синтетических суждений. Объем работ, посвященных данной тематике, довольно обширен[2], и в данной статье мы коснемся только вопроса априорных синтетических суждений в математике, связанного в основном с именем Курта Гёделя и попытками обоснования существования подобных суждений, основанных на его знаменитых результатах в основаниях математики и близких этой теме работах Алонзо Чёрча и Алана Тьюринга.

В начале XX века для основателя интуиционизма Л.Э.Я. Брауэра кантовская идея о существовании априорных синтетических суждений стала важнейшей в философском обосновании природы математического знания, поскольку, по его мнению, математика осуществляется посредством конструирования своих объектов в интуитивном сознании абстрактного математика. Современный шведский математик и логик Пер Мартин-Лёф замечает по этому поводу: «По моему мнению, справедливо сказать, что интуиционизм — это развитие по сути кантовской позиции в основаниях математики» (Мартин-Лёф, 2011, с. 17).

В то же время сторонники неопозитивизма, одного из самых влиятельных философских направлений XX века, полностью отвергли кантовскую

---

[2] См., например, (Wolenski, 2004).

концепцию априорных синтетических суждений. В книге «Философские принципы математики» (1912) французский логик и математик Луи Кутюра поместил обширное приложение под названием «Кантова философия математики», где он резко критикует кантовские априорные синтетические суждения в математике, исходя из концепции Лейбница об аналитичности математических истин. Вообще сами неопозитивисты кратко характеризуют свою концепцию следующим образом: «Именно в отказе от возможности синтетического познания a priori и заключается основополагающий тезис современного эмпиризма. Научное миропонимание знает лишь предложения опыта о всевозможных предметах и аналитические предложения логики и математики» (Карнап, Ганн, Нейрат, 2006, с. 65).

Позитивисты были сторонниками логицизма, то есть положения о том, что математика сводима в конечном итоге к основным логическим законам. Однако следует отметить, что различные формы логицизма могли и не совпадать между собой. Например, основатель логицизма Готтлоб Фреге также критикует Канта за то, что он выдвинул идею существования априорных синтетических суждений. По его мнению, все истины арифметики — аналитические, в отличие от геометрии, которая имеет дело с синтетическими суждениями. Рудольфа Карнап же полагает, что «имеются два существенно различных вида геометрий: одна — математическая и другая — физическая», и, соответственно, истины первой аналитичны и априорны, а второй — синтетичны (Карнап, 1971, с. 246). Когда концепция логицизма Фреге потерпела крах из-за того, что построенная им система оказалась противоречивой, в конце жизни он попытался построить математику уже на основании геометрии (Бирюков, 2000, с. 52). Программа логицизма Бертрана Рассела оказалась невыполнимой или же выполнимой не до конца, поскольку знаменитая система «Principia Mathematica», построенная им совместно с Альфредом Уайтхедом, не могла считаться чисто логической из-за наличия в них аксиом бесконечности, сводимости и выбора. Более поздняя форма логицизма отличается несколько другим описанием основ математики, в котором математика рассматривалась как задание аксиом и выводов из них в моделях, состоящих из множеств, описанных теорией множеств, например Цермело — Френкеля (ZF)[3].

Казалось бы, что статья У. В. О. Куайна «Две догмы эмпиризма», которая вышла в 1951 году, означала не только конец программы логического позитивизма, но и конец спорам о проблеме различения аналитических и

[3] Связана она была, в том числе, с программой финитизма Дэвида Гильберта в основаниях математики, которая предполагала чисто синтаксическое построение формальных систем, в которых множество всех доказуемых высказываний совпадало бы с множеством интуитивно истинных математических утверждений. Гильберт был противником логицизма, поскольку основанием математики может служить только сама математика, а именно ее внутренняя непротиворечивость. Однако его программа считается невыполнимой как раз в силу теоремы Гёделя о неполноте.

Интересно отметить, что, критикуя формальный метод доказательства Гильберта, другой великий математик Анри Пуанкаре отмечает: «Итак, рассуждение Гильберта не только предполагает принцип индукции, но оно предполагает вдобавок, что этот принцип нам дан не как простое определение, а как синтетическое суждение a priori» (Пуанкаре, 2007, с. 127). Более того, именно полная математическая индукция, по мнению Пуанкаре, служит демаркационной линией, отделяющей математику от логики.

синтетических истин. В этой статье Куайн пытается показывать, что невозможно дать точные формальные критерии для разграничения аналитических и синтетических суждений. По его мнению, даже отдельное высказывание само по себе не имеет значения. Осмысленное значение приобретает только система высказываний некоторой теории, которую можно соотнести с действительностью, чтобы проверить ее истинность. Показав, что не существует никаких формальных критериев для различения аналитических и синтетических высказываний и прежде всего для определения синонимии и взаимозаменяемости, он предложил заменить жесткую дихотомию «аналитическое/синтетическое» на подвижную — «периферийная часть теории/центральная часть теории». Он пишет: «Вся совокупность наших так называемых знаний или убеждений, начиная от самых случайных фактов… и заканчивая глубочайшими законами… это сооружение, созданное человеком, которое только краями соприкасается с опытом. Или, говоря образно, вся совокупность науки подобна силовому полю, пограничными условиями которого является опыт. Конфликт с опытом на периферии ведет к изменениям внутри самого поля. Должны перераспределятся истинностные значения некоторых из наших высказываний… Но поле в целом так не определено своими пограничными условиями, опытом, что есть достаточно широкий выбор относительно того, какие высказывания следует переоценить в свете любого единичного противоречащего опыта. Никакой отдельный опыт не связан с какими-то отдельными высказываниями внутри поля, кроме как косвенно, из соображений равновесия, влияющего на поле как целое» (Куайн, 2010, с. 75). Таким образом, жесткое деление высказываний на аналитические и синтетические размывается, релятивируется. Те из них, которые ближе всего к центру теории, будут аналогом аналитических, а те, которые ближе к периферии, могут служить аналогом синтетических. Таким образом, если логические позитивисты попытались «покончить» с кантовскими синтетическими суждениями априори, то некоторые аналитики в конце концов приходят к выводу, что «вообще не существует аналитических суждений, если аналитическое употребляется в узком (но ясном!) смысле…» (Пап, 2002, с. 167).

Однако интересно, что примерно в это же время с критикой неопозитивизма в статье «Является ли математика синтаксисом языка» (1953) выступил Курт Гёдель. Правда, она была опубликована только в 1995 году в 3-м томе собрания сочинений Гёделя, посвященном его философским работам[4]. В ней он критикует положения неопозитивизма, наиболее полно выраженные в работе Карнапа «Логический синтаксис языка» (1937), о том,

---

[4] Статья был написана по предложению редактора серии книг о современных философах, для тома, посвященного Рудольфу Карнапу. Несколько лет Гёдель готовил эту статью для публикации, пока не написал издателю, что он не хочет ее публиковать, поскольку будет уже слишком поздно, чтобы дать возможность Карнапу написать ответ, и он считает, что не будет честен, если опубликует свою статью без этого ответа. Кроме того, Гёдель замечает: «Полное выяснение ситуации оказалось сложнее, чем я ожидал, несомненно, из-за того, что ее предмет [статья] тесно связан с одной из основных проблем философии и частично идентичен ей, а именно с вопросом об объективной реальности понятий и их отношений. С другой стороны, ввиду широко распространенных предрассудков, он может принести больше вреда, чем пользы, чтобы опубликовать половину сделанной работы» (цит. по: Goldfarb, 1995, p. 324).

что математика аналитична и может быть сведена к логическим тавтологиям. Главный аргумент Гёделя опирается на его знаменитую Вторую теорему о неполноте[5]. Гёдель утверждает, что поскольку синтаксические правила языка, устанавливающие истинность предложений, сами должны быть непротиворечивыми, иначе в таком языке истинными будут все предложения[6], включая фактические, то необходимо установить непротиворечивость всех таких правил. А это невозможно в рамках данного формального языка в силу как раз Второй теоремы о неполноте и требует расширения сферы математики чтобы установить непротиворечивость таких правил, а это противоположно утверждению о том, что математика является исключительно результатом правил синтаксиса.

Далее Гёдель развивает и уточняет свою аргументацию следующим образом. Может оказаться, что такое «расширение» математики не будет обладать свойством консервативности, то есть когда истинность не всех ее положений будет сохранятся при таком расширении. Тогда, по мнению Гёделя, эмпирическое доказательство их непротиворечивости будет предпочтительнее, чем математическое, что в корне противоположно позиции неопозитивистов. С точки зрения Гёделя, в языки сначала входят эмпирические предложения, которые истинны или ложны в силу фактов в мире, а математика затем добавляется с помощью обычных синтаксических правил. Но для такого добавления, по мнению Гёделя, должно быть уже известно, что оно не повлияет на эмпирические предложения, данные в начале. Однако для выяснения этого требуется еще больше математики, что приводит к логической ошибке «предвосхищения основания» (petitio principii) (Gödel, 1995, p. 339).

Еще один важный и интересный для нас аргумент Гёделя против неопозитивистов связан с отношениями между математическими высказываниями и высказываниями, выражающими эмпирические законы. Он отмечает, что в эмпирических теориях математика не может быть отделена от выражения в них эмпирических законов. Таким образом, «законы природы без математики точно так же “не имеют содержания”... как математика без законов природы. Дело в том, что только законы природы вместе с математикой (или логикой) имеют следствия, проверяемые чувственным опытом. И поэтому произвольным образом содержатся в законах природы» (Gödel, 1995, p. 348—349). И далее: «Для определенной физической теории новая математическая аксиома... может привести к новым эмпирически проверяемым последствиям точно так же, как новый закон природы» (Gödel, 1995, p. 360). Интересно, что данная аргументация Гёделя кажется сходной с аргументацией Куайна, направленной против различия аналитических и синтетических высказываний, что является центральным положением для системы Карнапа и неопозитивистов вообще. По Куайну, нет никаких философски значимых различий между математическими истинами и эмпирическими, существуют только градации абстракции, зависящей от осо-

---

[5] Вторая теорема Гёделя гласит: непротиворечивость любой достаточно богатой математической системы, включающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы.

[6] Правда, это будет справедливо не для всех современных логик, но верно для классической логики.

бенностей опыта, но не имеющей никаких качественных различий и, соответственно, резких границ. То есть, по существу, нет принципиальных различий между объектами математики и объектами физики, между числами и молекулами… Однако для Гёделя такая аргументация показывает всего лишь аналогию между эмпирическими и математическими законами. Он настаивает на резком различии между математикой и эмпирическими науками: «Синтаксическая точка зрения на природу математики, несомненно, заслуживает того, чтобы указать на фундаментальное различие между математической и эмпирической истиной. Эта разница, я думаю, справедливо заключается в том, что математические положения, в отличие от эмпирических, истинны в силу понятий, встречающихся в них» (Gödel, 1995, p. 356). Его несогласие с позитивистами заключается в его взгляде на область понятий как на независимую реальность, к которой понятия предмета, факта и содержания применяются так же, как и к эмпирическому миру (цит. по: Goldfarb, 1995, p. 332).

Гёдель как-то заметил в одной из своих поздних работ по основаниям математике: «…если неверное понимание Канта уже привело к тому, что представляет интерес в философии и, косвенным образом, в науке, чего мы можем ожидать от правильно понятого Канта?» (Гёдель, 2014в, с. 211). Однако что касается проблемы синтетических суждений априори, то Гёдель нигде их не упоминает и не рассматривает. Тем не менее в двух своих работах, посвященных философии математики, он обсуждает проблему аналитичности в математике. В работе «Расселовская математическая логика» он пишет: «…нужно заметить, что аналитичность может пониматься в двух смыслах. Во-первых, она может иметь чисто формальный смысл, что термины могут быть определены (либо эксплицитно, либо через правила элиминации из содержащих их предложений) таким образом, что аксиомы и теоремы становятся специальными случаями закона тождества и опровергаемые суждения становятся отрицаниями этого закона. В этом смысле даже теория целых чисел, как может быть показано, не является аналитической…» (Гёдель, 2014а, с. 161). Таким образом, математика определенно неаналитична с этой позиции, потому что в противном случае ее аналитичность означала бы ее разрешимость, вопреки результатам самого Гёделя, а также Алонзо Чёрча и Алана Тьюринга, доказавшим, что формальная арифметика целых чисел и логика первого порядка неразрешимы[7].

Но во втором случае аналитические высказывания не должны пониматься как «лишенные содержания», они аналитичны в силу значений их составляющих по самой «природе понятий». Примером такой аналитической истины будет, например, схема аксиомы свертывания в теории множеств. По мнению Гёделя, можно защитить аналитичность математики в этом втором случае. Приведем обширную цитату из его статьи «Некоторые основные теоремы в основаниях математики и их следствия» 1951 года, чтобы показать, как он пытается это обосновать:

[7] Формальная теория называется разрешимой, если существует эффективная процедура, позволяющая для любой формулы языка данной теории в конечное число шагов ответить на вопрос, является ли эта формула теоремой или нет. Теорема Чёрча (1936) утверждает, что множество всех общезначимых формул логики предикатов неразрешимо.

Например, базисная аксиома или, скорее, аксиомная схема для концепции целых чисел говорит, что если задано вполне определенное свойство целых чисел (то есть пропозициональное выражение $\varphi(n)$ с целочисленным значением n), существует множество **M** этих чисел, которое имеет свойство φ. Теперь, рассматривая то обстоятельство, что φ само может содержать термин «множество целых чисел», мы обнаруживаем, что имеем ряд включенных в рассмотрение аксиом о концепции множества. Тем не менее эти аксиомы (как показывают упомянутые выше результаты) не могут быть сведены к чему-то существенно более простому и уж тем более к точным тавтологиям. Верно, что эти аксиомы значимы благодаря значению термина «множество» — можно было бы даже сказать, что они выражают само значение термина «множество», — и, следовательно, они могли бы быть подходяще названы аналитическими. Однако термин «тавтологический», то есть лишенный содержания, для них просто неуместен, потому что даже утверждение о существовании концепции множества, удовлетворяющего этим аксиомам (или о непротиворечивости этих аксиом), столь далеко от того, чтобы быть пустым, что оно не может быть доказано без повторного использования самой концепции множества или некоторой другой абстрактной концепции подобной природы.

Конечно, этот конкретный аргумент адресован только математикам, которые допускают в собственно математику общую концепцию множества. Для финитистов, однако, буквально тот же самый аргумент может быть задействован для концепции целого числа и аксиомы полной индукции. Потому что если общая концепция множества не допускается в собственно математику, тогда полная индукция предполагается в качестве аксиомы.

Я хотел бы повторить, что «аналитический» тут означает скорее не «истинный благодаря нашим определениям», а «истинный благодаря природе концепций», в противоположность «истинный благодаря свойствам и поведению вещей». Эта концепция аналитического столь далека от значения «лишенного содержания», что полностью возможно, что аналитическое утверждение могло бы быть неразрешимым (или разрешимым с определенной вероятностью) (Гёдель, 2014б, с. 196—197).

Аналитические высказывания, понимаемые в этом втором смысле, по Гёделю, будут более фундаментальным для обоснования многих высказываний в математике, которые считают аналитическими, чем класс аналитических тавтологических высказываний. Важно отметить, что в данном случае ход мысли Гёделя напоминает рассуждения Канта об аналитических суждениях. И, более того, он схож с аргументацией Канта, направленной на обоснование возможности априорных синтетических суждений. Ведь что означает быть «истинным благодаря природе концепций», а не благодаря «нашим определениям»? Это означает, что такие высказывания второго типа аналитичности, по Гёделю, имеют отношение к фундаментальной структуре нашего сознания и, согласно Канту, относятся либо к чистым понятиям рассудка, либо к чистым формам созерцания и дают определенное новое знание в силу возможности конструирования понятий, то есть благодаря «природе концепций», по Гёделю, в чистом, лишенным эмпирического содержания мышлении. Но мог ли Гёдель хоть в какой-то мере допустить существование априорных синтетических суждений? Хотя Кант и оказал значительное влияние на философские взгляды Гёделя, именно философию Лейбница Гёдель считал наиболее близкой своим воззрениям (Wang Hao, 1987, p. 55). А по Лейбницу, все математические истины могут быть только аналитическими. Будучи приверженцем определенной формы математического платонизма (Wang Hao, 1987, p. 69), которая предполагает «объективное существование фактов и объектов математики, не зависимых от наших ментальных актов и решений» (Wang Hao, 1987, p. 186), Гёдель не мог принять и априорность математического познания.

Но если сам Гёдель не коснулся проблемы априорных синтетических суждений, то именно его результаты в области оснований математики, а также работы А. Чёрча и А. Тьюнига, с ними связанные, послужили аргументами в защиту их существования. В 1949 году американский логик Ирвинг Копи в очень небольшой работе прибегает для этого к помощи Первой теоремы Гёделя о неполноте. Суть его аргументов такова. По определению Копи, высказывание ***A*** аналитично в языке ***L*** тогда и только тогда, когда его истинность вытекает из синтаксических или грамматических правил ***L***. А поскольку любой достаточно богатый язык, то есть язык, достаточный для формализации элементарной теории чисел, содержит неэмпирические и неиндуктивные высказывания, которые являются неразрешимыми в этом языке, то, согласно первой теореме Гёделя, они не могут быть аналитическими. Поэтому существует такая неаналитическая истина, которая также неэмпирична и неиндуктивна, то есть истина синтетических априори. А это, кстати, согласно Копи, разрушает концепцию априориорной аналитичности математики. Он отмечает: «Последствие данного результата для философской проблемы априорного знания ясно. Мы видели, что если есть какое-либо неэмпирическое или неиндуктивное общее положение, которое не разрешается на основе синтаксических правил языка, на котором оно выражено, то аналитическая теория априорного знания ложна. Вывод очевиден — аналитическая теория априорного знания ложна. А это равносильно утверждению, что существуют синтетические априорные предложения. И это следствие должно иметь философское значительное значение» (Copi, 1949, p. 244).

Правда, аргументация Копи сразу же была подвергнута критике — и довольно язвительной — со стороны другого логика, Атвела Туркета. Он замечает: «Утверждение о том, что существуют синтетическое априори Гёделя, равнозначно ни чему иному, чем повторению в вводящем в заблуждение философском языке достигнутых в современной логике результатов, а именно того, что обычно называют второй теоремой Гёделя о неполноте. Это повторение в терминах синтетической априорной истины вводит в заблуждение, поскольку предполагает связь с проблемами в истории философии, с которыми теоремы Гёделя, по существу, очень мало связаны» (Turquette, 1950, p. 126). Более того, такой философский язык только искажает точный смысл результатов Гёделя. Но если мы все же примем, что существующее истинное, но не доказуемое в достаточно богатой математической системе по Первой теореме Гёделя выражение является априорной синтетической истиной, то «тогда мы спросим, что это за истина? …Дело в том, что мы *не знаем*, какое философское значение может иметь синтетическая априорная истина, которую мы не знаем и на самом деле из результатов Гёделя никогда не сможем знать. Это была бы очень странная синтетическая априорная истина. И была бы так же полезна, как вещь в себе Канта, и так же неопределенна, как любая непредвиденная ситуация!» (Turquette, 1950, p. 128). «Нельзя отрицать, что из теорем Гёделя могут вытекать важные философские следствия, но маловероятно, чтобы их можно было найти в обосновании синтетических априорных истин», — заключает Туркет[8] (Turquette, 1950, p. 129).

Тем не менее несмотря на общефилософскую критику Куайна и критику, направленную на обоснование существования синтетических суждений априори с помощью теорем Гёделя, такие попытки были предприняты и позднее. Так, метаматематический аргумент в пользу синтетического априори дает американский математик Говард Делонг. В его трактовке метаарифметическое предложение, которое утверждает непротиворечивость арифметики и служит общим предположением теорем Гёделя о неполноте, следует классифицировать как синтетическое и априорное. Синтетическое, потому что оно не следует по определению из общей логики, и априорное, потому что если арифметика непротиворечива, она должна быть «необходимо непротиворечивой» (DeLong, 1970, p. 387).

Еще одна попытка доказать существование синтетических априорных высказываний в метаматематике была предложена Чарльзом Кастонгуэем. Он отталкивается от работы Якко Хинтикки «Являются ли математические истины синтетическими априори?», где Хинтикка отстаивает синтетический характер математического знания, которое требует работы интуитивного мышления, не сводимой к логическим законам, и правила которого нельзя установить полностью. Однако Кастонгуэй полагает, что без теоремы Чёрча аргументация Хинтикки не имела бы объективной опоры в современной логике. Аналитичность математики, по его мнению, полностью определяется разрешимостью, и поэтому из теоремы Чёрча о неразрешимости арифметики и его тезиса (постулирующего эквивалентность между интуитивным понятием алгоритмической вычислимости и строго формализованными понятиями частично рекурсивной функции или функции, вычисляемой на машине Тьюринга) должно следовать, что математическое знание является априорным синтетическим: «Синтетическая априорная природа математических истин заключается в этой предельной открытости и незавершенности математического знания, сущность которого основывается на теореме Чёрча» (Castonguay, 1976, p. 87).

Все упомянутые выше аргументы в общем построены по сходной схеме и апеллируют либо к неполноте, либо к неразрешимости математики. В своем обширном обзоре, посвященном вопросам дистинкций «априори/апостериори» и «аналитическое/синтетическое» в истории философии, в логике и математике, польский логик и философ Ян Воленьский так характеризует все эти попытки: «Я пришел к выводу, что ни один из упомянутых аргументов не заставляет нас признать, что существуют синтетические априорные высказывания, поскольку все данные примеры можно интерпретировать как прагматические аналитические высказывания»

---

[8] В чем-то с Туркетом можно и согласиться, особенно если учитывать кантовскую концепцию логики. Томас Зеебом замечает по этому поводу: «…в XX веке читатели под влиянием ошибочного высказывания Канта о логике (о том, что логика «кажется наукой вполне законченной и завершенной». — *А. П.*) испытывают искушение понять кантовскую концепцию логики как концепцию, которую можно эксплицировать с помощью современной формализованной логики. Одно из следствий этого заключается в том, что кантовское различение аналитических и синтетических суждений либо понимается неправильно, либо вообще становится бессмысленным» (Зеебом, 1993, с. 67).

(Wolenski, 2004, p. 821). По его мнению, в понятие аналитического высказывания следует включить особого рода прагматические аналитические высказывания; поскольку любой выбор предполагаемой логико-математической модели всегда определяется прагматическими факторами. Так, например, когда доказательство существования априорных синтетических высказываний опирается на Первую теорему Гёделя, которая гласит: «Если формальная теория, включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна», то по прагматическим соображениям мы выбираем вариант непротиворечивости математики, что и позволяет нам сделать вывод о ее неполноте.

Однако можно быть уверенным, что пдобные обоснования и априорности, и синтетичности математики не будут последними, поскольку, как показал аргентино-американский математик Грегори Джон Чейтин, недоказуемость истинных высказываний в математике является нормой и класс таких утверждений бесконечен. По теореме, им доказанной, существует предел сложности — предел Чейтина, переступить который невозможно в рамках математического знания (Chaitin, 1999, p. 25).

* * *

В заключение еще раз процитируем упомянутого выше Делонга:

> Теперь мы видим, что не может быть единственного свойства, характеризующего математические высказывания, которое позволило бы нам решать, кто прав: Кант, Милль или Рассел. Математические высказывания, такие как «0 = 0», безусловно, являются аналитическими априорными, их истина целиком зависит от общей логики и определения. С другой стороны, феномен эмпирической вероятности в математике, а также практически неразрешимые и невычислимые задачи дают нам примеры синтетических апостериори. Наконец, **C** (предложение, утверждающее непротиворечивость арифметики. — *А.П.*) при его предполагаемой интерпретации может быть разумно классифицировано как синтетическое априорное; синтетическое, потому что оно не следует из определений и общей логики, априорное, потому что если арифметика непротиворечива, она должна быть необходимо непротиворечивой (DeLong, 1970, p. 387).

В одной из наших работ на примере некоторых исторических фактов, связанных с историей обсуждения природы аналитических и синтетических суждений в логике, показывается, что представления об их статусе существенным образом зависят от принятого образа логики (Пушкарский, 2012). И это хорошо согласуется с идеей, выраженной в цитате Делонга. Следует отметить, что определенное разнообразие взглядов на проблемы, подобные проблеме существования синтетических априорных суждений, обусловлено не ошибочностью тех или иных концепций логики или математики или, наоборот, их близостью к некоторой безусловной истине. В данном случае значительную роль играют философские установки, представление о природе и культурной роли в обществе в данном случае логики и математики, а также их месте в системе науки, явно или неявно принимаемые тем или иным исследователем. Эта образная модель реконструкции истории логики основана на понятии «образ логики», введенном И. Н. Грифцовой: «Предложенный подход предполагает выделение (по самым разным основаниям) и анализ различных образов логики, рассмотрение их влияния как на реальное бытие логики в культуре, жизни общества, так и на формирование образов логики прошлого. Данный подход предполагает также осознание того факта, что наряду со сменой различных образов логики возможно и их сосуществование в один и тот же исторический период» (Грифцова, 1998, с. 14)[9].

Проведенный выше анализ обоснований в пользу существования априорных синтетических высказываний демонстрирует то, что решение этой проблемы зависит от явно или неявно принимаемого образа логики, ключевым параметром которого, по нашему мнению, выступает предмет логики или, иначе говоря, представления о природе логического и, соответственно, о границах логики и математики. Еще один пример такого предположения — небольшая работа Богуслава Вольневича, где он утверждает, что «математика не отражает реальность и не является частью логического синтаксиса языка. Математика — проявление того, как связаны язык и реальность. Логика не зависит от этого… и если мы не принимаем расселовский логицизм… то должны заявить, что вся математика — это просто расширение логики» (Wolniewicz, 1994, p. 334). И в таком случае, «используя терминологию Карнапа, можно сказать, что… "синтетические суждения априори Канта" — это "постулаты значения" языка L: высказывания истинны лишь благодаря тому, что существует определенная смысловая связь между этим языком и реальностью» (Wolniewicz, 1994, p. 330).

Нечто аналогичное мы можем наблюдать и в современной математике. В своей теории типов Мартин-Лёф прямо указывает на наличие априорных синтетических суждений как результат математической деятельности по построению математических объектов определенного вида[10]: «…у Канта была невероятно важная идея, а именно идея существования синтетических суждений a priori, а также то, что эти суждения обязательно возникают, так как интересные математические теоремы требуют для их доказательства построения некоторой конструкции» (Мартин-Лёф, 2011, с. 17). Такие «интересные математические суждения» — это экзистенциальные суждения, «сложность математического доказательства которых заключается в том, чтобы найти или построить объект, который подпадает под понятие, которому экзистенцальное суждение приписывает существование». Таким образом, экзистенцальные суждения синтетические, поскольку в них «следует выйти за пределы того, что содержится в суждении самом по себе». А теорема о неполноте Гёделя должна «относится к логике синтетических суждений», поскольку последняя является неполной и неразрешимой (Мартин-Лёф, 2011, с. 15).

Также следует отметить, что в теории типов логика в определенном смысле является внутренней математической конструкцией. «И если логицизм сводит математику к логике, то здесь мы имеем обратное отношение, когда логика сводится к математике…» (Vasyukov, 2017, c. 67).

Подытожим данные представления в виде таблицы, которая, конечно, не будет полной, а носит скорее демонстрационный характер.

---

[9] См. также (Брюшинкин, Попова, 2010; Попова, 2010; Пушкарский, 2011).

[10] Несмотря на защиту априорных синтетических суждений, Кант вряд ли смог бы согласиться с Мартином-Лёфом в том, что логические законы не аналитичны, а являются синтетическими априори истинами (Мартин-Лёф, 2011, с. 13).

Образ логики	Математика = логике	Математика ← логика	Априорные синтетические истины существуют как «конструирование понятий»	*Пер Мартин-Лёф* В теории типов логика сводится к математике
		Математика → логика	Не существуют априорных синтетических истин	*Луи Кутюра, Рудольф Карнап* Все математические истины — аналитические и сводимы к основным логическим законам
		Логика — это раздел математики	Априорные синтетические истины в принципе возможны как результат интерпретации аксиоматических исчислений	*Давид Гильберт* Логика — это метаматематика: теория доказательств и теория моделей
	Математика ≠ логике	Математика — это просто физика	Все истины математики синтетичны и апостериорны	*Владимир Арнольд* Математика относится к сфере эмпирического опыта, подобно классической евклидовой геометрии и практической арифметике
		Математика относится к сфере эмпирического	Невозможно провести границу между аналитическими и синтетическими высказываниями	*У. В. О. Куайн* Нет никаких философски значимых различий между математическими истинами и эмпирическими
			Существуют априорные синтетические истины	*Иммануил Кант* Математика имеет дело с конструированием своих понятий и объектов в чистом созерцании, то есть в чистых априорных формах чувственности
		Математические объекты конструируются в области чистых форм чувственности (пространства и времени)	Можно строго различить аналитические и синтетические суждения	*Иммануил Кант* Чистая общая логика аналитична и не имеет никого отношения к сфере чувственности

Список литературы

1. *Брюшинкин В.Н., Попова В.С.* Логика в русском неокантианстве: образ логики А.И. Введенского // Неокантианство немецкое и русское: между теорией познания и критикой культуры / под ред. И.Н. Грифцовой, Н.А. Дмитриевой. М., 2010. С. 165—178.

2. *Бирюков Б.В.* Введение. Готтлоб Фреге: современный взгляд // Фреге Г. Логика и логическая семантика. М., 2000.

3. *Гёдель К.* Расселовская математическая логика // Хинтикка Я. О Гёделе. Курт Гедель Статьи. М., 2014а. С. 125—165.

4. *Гёдель К.* Некоторые основные теоремы в основаниях математики и их следствия // Там же. 2014б. С. 166—200.

5. *Гёдель К.* Современное развитие оснований математики в свете философии // Там же. 2014в. С. 201—211.

6. *Грифцова И.Н.* Логика как теоретическая и практическая дисциплина. К вопросу о соотношении формальной и неформальной логики. М., 1998.

7. *Зеебом Т.М.* Логика понятий как предпосылка кантовской формальной и трансцендентальной логики // Кантовский сборник. Вып. 17. Калининград, 1992.

8. *Кант И.* Критика чистого разума // Сочинения в шести томах. М., 1964. Т. 3.

9. *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука // Там же. М., 1965. Т. 4, ч. 1.

10. *Карнап Р.* Философские основания физики. М., 1971.

11. *Карнап Р., Ганн Г., Нейрат О.* Научное миропонимание — Венский кружок // Журнал «Erkenntnis» («Познание»). Избранное. М., 2006. С. 57—74.

12. *Куайн У.В.О.* С точки зрения логики. 9 логико-философских очерков. М., 2010.

13. *Мартин-Лёф П.* Логика сегодня. Аналитические и синтетические суждения в теории типов // Логико-философские штудии. 2011. Т. 9, № 1. С. 5—17.

14. *Пуанкаре А.* Математика и логика // Пуанкаре А., Кутюра Л. Математика и логика. М., 2007. С. 116—148.

15. *Попова В.С.* Спор о логике в университетской философии Санкт-Петербурга начала XX века. Калининград, 2010.

16. *Пушкарский А.Г.* Методология истории логики: синтетический подход // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2011. Вып. 6. С. 25—34.

17. *Пушкарский А.Г.* Проблема аналитических и синтетических суждений в истории и философии логики // Рацио.ru. 2012. № 8. С. 160—185.

18. *Chaitin G.J.* The Unknowable. Singapore, 1999.

19. *Copi I.* Modem Logic and the Synthetic A Priori // The Journal of Philosophy. 1949. № 46. P. 243—245.

20. *Castonguay Ch.* Church's Theorem and the Analytic/Synthetic Distinction in Mathematics // Philosophica. 1976. № 18(2). P. 77—89.

21. *DeLong H.* A Profile of Mathematical Logic. Addison-Wesley Reading, Mass., 1970.

22. *Gödel K.* Is mathematics syntax of language? // Collected Works / Feferman S., Dawson J., Kleene S. [et al.] (eds.). Oxford ; N. Y., 1995. Vol. 3. P. 334—362.

23. *Goldfarb W.* Godel *1953/9: Introductory note to *1953/9 // Ibid. P. 324—334.

24. *Turquette A.R.* Godel and the Synthetic A Priori // The Journal of Philosophy 1950. Vol. 47, № 5 (Mar. 2). P. 125—129.

25. *Vasyukov V.L.* On Antilogicism // Десятые Смирновские чтения : матер. Междунар. науч. конф. (Москва, 15—17 июня 2017 г.). М., 2017. С. 65—67.

26. *Wang Hao.* A Logical Joinery: From Gödel to Philosophy. Cambridge, Massachusetts, 1987.

27. *Wolenski J.* Analytic vs. Synthetic and A Priori vs. A Posteriori // Handbook Of Epistemology. 2004. Springer. P. 781—839.

28. *Wolniewicz B*. On the Synthetic A Priori // Philosophical Logic in Poland, Kluwer Academic Publishers / J. Woleilski (ed.). Dordrecht, 1994. P. 327—335.

Об авторе

Анатолий Геннадьевич ***Пушкарский***, старший преподаватель Института гуманитарных наук, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия, pushcarskiy@mail.ru

KANT, GÖDEL, AND THE PROBLEM OF SYNTHETIC *A PRIORI* JUDGEMENTS

A. G. Pushkarsky

Debates over Kant's famous postulate about the existence of synthetic a priori judgements in mathematics, formulated in the Critique of Pure Reason*, have been raging for over two centuries. On the one hand, it was fiercely criticised by neo-positivists in the early 20th century. On the other hand, Kant's ideas on constructive nature of mathematics served as a philosophical framework for LEJ Brouwer's programme of intuitionism in the foundations of mathematics. Of interest are the ideas of the great logician and mathematician Kurt Gödel about the analytical nature of mathematics, put forward in a number of his works on philosophy of mathematics. Although he never mentions synthetic* a priori *judgements, the course of his reasoning about analytical judgements is close to that employed by Kant. As early as the mid-20th century, Gödel's incompleteness theorems and the works of Church and Turing constituted arguments in favour of the existence of synthetic* a priori *judgements. The American logician Irving Copi was the first to use Gödel's first incompleteness theory to that end. While his small work went almost unnoticed, such ideas were expressed by at least two other mathematicians. In modern mathematics, particularly, Martin-Löf type theory, the existence of synthetic* a priori *truths, is considered justified. Although it is based on different grounds than those mentioned above, it is nevertheless compatible with Gödel's results.*

Analysing proofs of existence of synthetic a priori judgements helps demonstrate that a solution to this problem is determined by the implicitly or explicitly accepted image of logic, whose key parameter is the object of logic or, in other worlds, the ideas about the nature of the logical and, therefore, the ideas about the boundaries of logic and mathematics.

Key words*: Kant, synthetic* a priori *judgement, Gödel incompleteness theorem, image of logic.*

References

1. Bryushinkin V.N., Popova V.S. 2010, Logika v russkom neokantianstve: obraz logiki A.I. Vvedenskogo [Logic in Russian Neokantianism: the image of logic A.I. Vvedensky] In: Griftsova, I.N., Dmitrieva, N.A. (eds.), *Neokantianstvo nemeckoe i russkoe: mezhdu teoriej poznaniya i kritikoj kultury* [German and Russian Neo-Kantianism: between the theory of knowledge and the criticism of culture]. Moscow, p. 165—178.

2. Biryukov B.V. 2000, Vvedenie. Gottlob Frege: sovremennyj vzglyad [Introduction. Gottlob Frege: modern look] In: Frege G. *Logika i logicheskaya semantika* [Logic and Logical Semantics]. Moscow, pp. 8—63.

3. Gödel K. 2014a, Rasselovskaya matematicheskaya logika (1942) [Russellian mathematical logic] In: Hintikka Y.A. *O Gödele. Kurt Gödel Stat'i* [About Gödel. Kurt Gödel Articles]. M.: «Kanon+» ROOI «Reabilitaciya», pp. 125—165.

4. Gödel K. 2014b, Nekotorye osnovnye teoremy v osnovaniyah matematiki i ih sledstviya (1951) [Some basic theorems in the foundations of mathematics and their consequences] In: Hintikka Y.A. *O Gödele. Kurt Gödel Stat'i* [About Gödel. Kurt Gödel Articles]. M.: «Kanon+» ROOI «Reabilitaciya», pp. 125—165.

5. Gödel K. 2014c, Sovremennoe razvitie osnovanij matematiki v svete filosofii (1961) [Modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy] In: Hintikka Y.A. *O Gödele. Kurt Gödel Stat'i* [About Gödel. Kurt Gödel Articles]. M.: «Kanon+» ROOI «Reabilitaciya», pp. 125—165.

6. Grifcova I.N. 1998, *Logika kak teoreticheskaya i prakticheskaya disciplina. K voprosu o sootnoshenii formal'noj i neformal'noj logiki* [Logic as a theoretical and practical discipline. On the question of the relationship between formal and informal logic]. Moscow.

7. Zeebom T.M. 1992, Logika ponyatij kak predposylka kantovskoj formal'noj i transcendental'noj logiki [The logic of concepts as a prerequisite for Kant's formal and transcendental logic] In: *Kantovskij sbornik. Vyp. 17.* [Kantovsky sbornik. Issue 17] Kaliningrad.

8. Kant, I. 1964, *Kritika chistogo razuma* [Critique of Pure Reason] in: Kant, I. Sochinenija v shesti tomah [The works in six volumes], vol. 3, Moscow.

9. Kant, I. 1965, *Prolegomeni ko vsjakoj buduschej metafisike, moguschej pojavitsja kak nauka* [Prolegomena to any future metaphysics that may appear as a science] in: Kant, I. Sochinenija v shesti tomah [The works in six volumes], vol. 4/1, Moscow.

10. Karnap R. 1971, *Filosofskie osnovaniya fiziki* [Philosophical Foundations of Physics]. Moscow, Progress.

11. Karnap R., Hahn H., Neurath O. 2006, Nauchnoe miroponimanie — Venskij kruzhok [Wissenshhaftliche Weltauffassung] in: *Zhurnal («Poznanie»). Izbrannoe* [Journal "Erkenntnis". Favorites]. Moscow, pp. 57—74.

12. Quine, W.V. 2010, *S tochki zreniya logiki. 9 logiko-filosofskih ocherkov* [From A Logical Viewpoint - Logico-Philosophical Essays]. Moscow.

13. Martin-Löf Per. 2011, Logika segodnya. Analiticheskie i sinteticheskie suzhdeniya v teorii tipov [Logic today. Analytical and synthetic judgments in the theory of types] In: *Logiko-filosofskie shtudii* [Logical and philosophical studies]. T. 9, (№ 1), St. Petersburg, pp. 5—17.

14. Poincare A. 2007, Matematika i logika [Mathematics and Logic] In: Poincare A., Couturat L. *Matematika i logika* [Mathematics and Logic]. Moscow, pp. 116—148.

15. Popova V.S. 2010, *Spor o logike v universitetskoj filosofii Sankt-Peterburga nachala XX veka* [The debate about logic in the university philosophy of St. Petersburg early XX century]. Kaliningrad.

16. Pushkarsky A.G. 2011, Metodologiya istorii logiki: sinteticheskij podhod [Methodology of the History of Logic: A Synthetic Approach] In: *Vestnik Baltijskogo federal'nogo universiteta im. Immanuila Kanta. Vyp 6* [IKBFU's Vestnik, 2011 Issue № 06]. Kalinigrad, pp. 25—34.

17. Pushkarsky A.G. Problema analiticheskih i sinteticheskih suzhdenij v istorii i filosofii logiki [The problem of analytical and synthetic judgments in the history and philosophy of logic] In: *Ratio.ru. 2012. № 8.* Kalinigrad, pp. 160—185.

18. Chaitin G.J. 1999, *The Unknowable*. Singapore.

19. Copi I. 1949, 'Modem Logic and the Synthetic A Priori', in: *The Journal of Philosophy,* vol. 46, p. 243—245.

20. Castonguay, Ch. 1976, Church's Theorem and the Analytic/Synthetic Distinction in Mathematics, In: *Philosophica, vol. 18, no. 2*, p. 77—89.

21. DeLong, H. 1970, *A Profile of Mathematical Logic*, Addison-Wesley Reading, Mass.

22. Gödel K. 1995, Is mathematics syntax of language? In: Gödel K. *Collected Works, V.3.* Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., and van Heijenoort, J. (eds.). Oxford — New — York: Oxford University Press. pp. 334—362.

23. Goldfarb W. 1995, Godel *1953/9: Introductory note to *1953/9. (1995), In: *Gödel K. Collected Works, V.3.* Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., and van Heijenoort, J. (eds.). Oxford — New — York: Oxford University Press, pp. 324—334.

24. Turquette A.R. 1950, Gödel and the Synthetic a priori, in: *The Journal of Philosophy, vol. 47, no. 5* (Mar. 2, 1950), p. 125—129.

25. Vasyukov V.L. 2017, On Antilogicism In: *Desyatye Smirnovskie chteniya: materialy Mezhdunar. nauch. konf., Moskva, 15 – 17 iyunya 2017* [The Tenth Smirnov Readings in Logic to be held on 15—17 June 2017]. Moscow, pp. 65—67.

26. Wang Hao. 1987, *A Logical Joinery: From Gödel to Philosophy*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

27. Wolenski J. 2004, Analytic vs. Synthetic and A Priori vs. A Posteriori In: *Handbook Of Epistemology*. Springer, pp. 781—839.

28. Wolniewicz, B.: 1994, On the Synthetic A Priori In: J. Woleilski (ed.), *Philosophical Logic in Poland,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 327—335.

About the author

Anatoly ***Pushkarsky***, Assistant Professor, Institute for the Humanities, IKBFU, Russia, pushcarskiy@mail.ru