O. Omelyan

THE OBJECT OF CURVATURE OF GROUP CONNECTION ON THE DISTRIBUTION OF PLANES IN A SPACE OF PROJECTIVE CARTAN'S CONNECTION

The canonical space of a projective Cartan's connection with the structural equations which generalize appropriate equations of a space of affine connection is considered. In space of a projective connection the distribution of planes is investigated. This distribution generates series of subtensors of torsion-curvature's tensor. It is shown, that the object of curvature of group connection in a principal bundle associated with distribution of planes is a tensor only in aggregate with some tensor, making it vanish, the object of curvature independently forms a tensor.

УДК 514.76

В.И. Паньженский

(Пензенский государственный педагогический университет)

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛАГРАНЖИАНОВ

Вводится понятие естественной последовательности лагранжианов лагранжева пространства $L^n = (M, L)$ и стабильного лагранжиана. Получены необходимые условия стабильности лагранжиана и установлено, что среди однородных лагранжианов стабильными являются финслеров лагранжиан, степень однородности которого равна 2, и лагранжиан однородный степени -1.

1. Финслерова геометрия — это геометрия невырожденного лагранжиана $F(x, y)$, однородного второй степени по коор-

динатам касательного вектора. Расстояние ds между двумя близкими точками x и $x+dx$ определяется формулой

$$ds = \sqrt{F(x, dx)}\,, \tag{1.1}$$

что обеспечивает инвариантность длины дуги кривой

$$s = \int_a^b \sqrt{F(x(t), \dot{x}(t))}dt \tag{1.2}$$

относительно замены параметра. В финслеровой геометрии естественным образом возникает метрический тензор g, компоненты которого g_{ij} есть вторые частные производные от функции $\frac{1}{2}F(x,y)$ по координатам касательного вектора

$$g_{ij} = \frac{1}{2}F_{\cdot i \cdot j}\,. \tag{1.3}$$

Из условия однородности $F(x,y)$ следуют важные соотношения

$$y^i F_{\cdot i} = 2F\,,\ y^i F_{\cdot i \cdot j} = F_{\cdot j}\,,\ y^i y^j F_{\cdot i \cdot j} = 2F\,, \tag{1.4}$$

$$F = g_{ij} y^i y^j\,, \tag{1.5}$$

что позволяет длину дуги кривой определить формулой, аналогичной формуле римановой геометрии

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x,\dot{x})\dot{x}^i \dot{x}^j}\,dt\,, \tag{1.6}$$

указывающей на то, что финслерова геометрия является естественным обобщением римановой и может эффективно использовать методы римановой геометрии [1].

Другое направление развития финслеровой геометрии, тесно связанное с задачами вариационного исчисления и предполагающее исследование финслерова пространства как гладкого многообразия, касательные пространства которого есть пространства Минковского, также основывается на фундаментальных формулах (1.1—1.6) (см., например, [2]).

Однако физики при построении различных теорий часто используют лагранжианы (как правило, невырожденные), не обладающие такими замечательными свойствами, как финслеров лагранжиан. Например, в теории гравитационно-электромагнитного поля наряду с финслеровым лагранжианом Рандерса используют лагранжианы, не обладающие какой-либо однородностью по скоростям. В аналитической механике также встречаются нефинслеровы лагранжианы, а в определении регулярной механической системы на лагранжиан не накладывается других условий кроме невырожденности. Геометрия этих лагранжианов строится весьма формально и чаще всего имеет своей целью построение аналитического аппарата, необходимого физикам.

В настоящей заметке мы выделяем класс лагранжианов, которые по некоторым своим свойствам близки к финслеровым. Развитие геометрии таких лагранжианов, на наш взгляд, представляет определенный интерес как с точки зрения физики, так и с точки зрения дифференциальной геометрии.

2. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, TM — касательное расслоение над M, (x^i) — локальные координаты на M, (x^i, y^i) — естественные локальные координаты на TM, а $L(x, y)$ — невырожденный лагранжиан, т. е. скалярная функция на TM такая, что $\det\left\|L_{\cdot i \cdot j}\right\| \neq 0$. Многообразие M с заданным невырожденным лагранжианом называется лагранжевым пространством $L^n = (M, L)$. Функции

$$h_{ij} = \frac{1}{2} L_{\cdot i \cdot j} \tag{2.1}$$

являются компонентами тензора h, который, так же как и в финслеровом случае, называется метрическим.

Построим лагранжиан

$$L^1 = h_{ij} y^i y^j . \tag{2.2}$$

Для финслерова лагранжиана F в силу соотношения (1.5) $F^1 = F$. В общем случае $L^1 \neq L$. Построим тензор h^1:

$$h_{ij}^1 = \frac{1}{2} L_{\cdot i \cdot j}^1 , \tag{2.3}$$

затем лагранжиан

$$L^2 = h_{ij}^1 y^i y^j \tag{2.4}$$

и т. д. Таким образом, возникает естественная последовательность лагранжианов

$$L^0 = L , \ L^1, \ L^2, \ \ldots \tag{2.5}$$

Если существует такое целое k, что $L^k = L^{k-1}$, то последовательность (2.5) стабилизируется на k-м шаге, а лагранжиан L^{k-1} является стабилизирующим. Если $k = 1$, т. е. $L^1 = L$, то лагранжиан L назовем стабильным. В этом смысле финслеров лагранжиан является стабильным.

Естественно возникает вопрос. Существуют ли невырожденные стабильные лагранжианы, отличные от финслеровых? Предположим, что L — стабильный лагранжиан, т. е. $L^1 = L$. Тогда h^1 должен совпадать с h. Найдем h_{ij}^1, дифференцируя дважды L^1, определенный формулой (2.2). В результате получим

$$h_{ij}^1 = h_{ij} + L_{\cdot p \cdot i \cdot j} y^p + \frac{1}{4} L_{\cdot p \cdot k \cdot i \cdot j} y^p y^k . \tag{2.6}$$

В силу нашего предположения $h_{ij}^1 = h_{ij}$, поэтому

$$y^p L_{\cdot p \cdot i \cdot j} + \frac{1}{4} y^p y^k L_{\cdot p \cdot k \cdot i \cdot j} = 0 . \tag{2.7}$$

Итак, имеет место

Утверждение 1. *Для того чтобы лагранжиан L был стабильным, необходимо, чтобы L удовлетворял системе дифференциальных уравнений (2.6).*

Условие (2.7) не является достаточным, поскольку из совпадения метрических тензоров не следует совпадение порождающих их лагранжианов. Однако если L удовлетворяет условию (2.7), то, как следует из уравнений (2.6), $h^1 = h$, и тогда лагранжиан L^2 совпадает с L^1. Следовательно, справедливо

Утверждение 2. *Если лагранжиан L удовлетворяет уравнениям (2.7), то естественная последовательность лагранжианов стабилизируется на втором шаге, а лагранжиан* L^1 *является стабильным.*

3. К примеру, рассмотрим лагранжианы, однородные *k*-й степени по координатам касательного вектора: $L(x,\lambda y) = \lambda^k L(x,y)$. Тогда имеем следующие соотношения

$$y^p L_{\cdot p} = kL,\ y^p L_{\cdot p \cdot i} = (k-1)L_{\cdot i},\ y^p L_{\cdot p \cdot i \cdot j} = (k-2)L_{\cdot i \cdot j}; \quad (3.1)$$

$$y^p L_{\cdot p \cdot i \cdot j \cdot k} = (k-3)L_{\cdot i \cdot j \cdot k},\ y^p y^k L_{\cdot p \cdot k \cdot i \cdot j} = (k-3)(k-2)L_{\cdot i \cdot j}. \quad (3.2)$$

Подставляя соотношения (3.1) и (3.2) в уравнения (2.7), получим

$$(k-2)L_{\cdot i \cdot j} + \frac{1}{4}(k-3)(k-2)L_{\cdot i \cdot j} = 0, \quad (3.3)$$

откуда следует, что

$$(k-2)(k+1) = 0. \quad (3.4)$$

При $k = 2$ имеем финслеров лагранжиан — он стабилен. В силу утверждения 1 $k = -1$ является необходимым условием стабильности лагранжиана. Для лагранжиана $L(x,y)$, однородного степени -1, имеем

$$y^i L_{\cdot i} = -L,\ y^i L_{\cdot i \cdot j} = -2L_{\cdot i},\ y^i y^j L_{\cdot i \cdot j} = -2L_{\cdot j} y^j = 2L, \quad (3.5)$$

откуда следует, что, как и в финслеровом случае,

$$L = h_{ij} y^i y^j, \quad (3.6)$$

где

$$h_{ij} = \frac{1}{2} L_{\cdot i \cdot j} \quad (3.7)$$

есть компоненты метрического тензора лагранжева пространства $L^n = (M, L)$. Равенство (3.6) означает, что $L^1 = L$, т.е. лагранжиан L стабилен. Таким образом, имеет место

Утверждение 3. *Среди однородных лагранжианов только два — стабильные: финслеров лагранжиан (* $k=2$ *) и лагранжиан, однородный степени -1 (* $k=-1$ *).*

По этой причине представляет интерес изучение геометрии лагранжиана, однородного степени -1. Расстояние между близкими точками x и $x+dx$ можно определить формулой

$$ds = \frac{1}{L(x,dx)}. \tag{3.8}$$

В этом случае формула

$$s = \int_a^b \frac{dt}{L(x(t),\dot{x}(t))} \tag{3.9}$$

дает инвариантное относительно замены параметра определение длины дуги кривой.

Список литературы

1. *Cartan E.* Les espaces de Finsler. Actualites 79. Paris, 1934.

2. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.

3. *Klein Y.* Espaces variationnes et mecanique / Ann. Inst. Fourier. 12(1962). 1—124.

V. Panzhenskiy

NONDEGENERATE LAGRANGIANS AND NATURAL SEQUENCES OF LAGRANGIANS

The notion of the natural sequence of Lagrangians in the Lagrange space $L^n=(M,L)$ and the notion of the stable Lagrangian are introduced. The necessary condition of stability of Lagrangian is obtained. It is established that there are two stable Lagrangians among homogeneity Lagrangians. They are the Finsler Lagrangian with the degree of homogeneity 2 and the Lagrangian with the degree of homogeneity -1.