УДК 574.76

В. С. Малаховский, Е. А. Щербак
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
nikolaymal@mail.ru

О невозможности использования символов Кронекера в качестве множителей при получении новых геометрических объектов

Показано, что при умножении конечного числа символов Кронекера на заданный геометрический объект не может возникнуть ничего, кроме многократно повторяющегося исходного геометрического объекта.

Ключевые слова: геометрический объект, тензор, символ Кронекера.

Пусть на многообразии M_N задан тензор $\{\lambda^a\}$ $\left(a=\overline{1,m}\right)$. Рассмотрим систему величин

$$\Lambda_i^{ja}=\delta_i^j\lambda^a \ \left(i,j,k=\overline{1,n}\right),\ \delta_i^j=\begin{cases}1, \text{\textit{при} } i=j,\\ 0, \text{\textit{при} } i\neq j.\end{cases} \tag{1}$$

В подробной записи она имеет вид

$$\Lambda_i^{ia}=\lambda^a \ \ (\textit{по } i \textit{ не суммировать}), \Lambda_i^{ja}=0 \ \left(i\neq j\right), \tag{2}$$

т. е. нового геометрического объекта не возникает, что доказывает очевидную некорректность утверждений, сделанных в [1—3]. Кроме того, если даже проделывать выкладки с использованием соответствующих дифференциальных уравнений, как указано в статьях [1—3], ничего нового мы не получим.

Действительно, считая систему величин $\left\{\Lambda_i^{ja}\right\}$ тензором, будем иметь

$$\Delta\Lambda_i^{ja} \equiv 0\,, \tag{3}$$

где

$$\Delta\Lambda_i^{ja} = d\Lambda_i^{jk} + \Lambda_i^{ka}\omega_k^j - \Lambda_k^{ja}\omega_i^k + \Lambda_i^{jb}\omega_b\,, \tag{4}$$

а запись вида $\theta \equiv 0$ (где θ некоторая форма Пфаффа) означает здесь и в дальнейшем сравнение θ по модулю базисных форм (такое обозначение используется в статье [1]). Разность

$$\Lambda_i^{ka}\omega_k^j - \Lambda_k^{ja}\omega_i^k \tag{5}$$

в выражении (4) является тождественным нулем:

$$\Lambda_i^{ka}\omega_k^j - \Lambda_k^{ja}\omega_i^k = \delta_i^k\lambda^a\omega_k^j - \delta_k^j\lambda^a\omega_i^k = \lambda^a\left(\omega_i^j - \omega_i^j\right) = 0\,. \tag{6}$$

Следовательно, подставляя (6) в (3), получим

$$\Delta\Lambda_i^{ja} = d\Lambda_i^{ja} + \Lambda_i^{jb}\omega_b \equiv 0\,. \tag{7}$$

Учитывая (1), будем иметь

$$\Delta\Lambda_i^{ja} = \delta_i^j d\lambda^a + \delta_i^j\lambda^b\omega_b \equiv 0 \tag{8}$$

или

$$\Delta\Lambda_i^{ja} = \delta_i^j\Delta\lambda^a \equiv 0\,, \tag{9}$$

а это значит, что

$$\Delta\Lambda_i^{ia} = \Delta\lambda^a \equiv 0 \;\; (\textit{по } i \textit{ не суммировать}),\; \Delta\Lambda_i^{ja} = 0 \;\left(i \neq j\right). \tag{10}$$

Таким образом, формула (3) не дает ничего нового, а только n-кратное повторение ковариантного дифференцирования исходного тензора $\left\{\lambda^a\right\}$.

Рассуждая аналогичным образом для h-кратного повторения символов Кронекера $\delta_{i_1}^{j_1}, \delta_{i_2}^{j_2}, \ldots, \delta_{i_h}^{j_h}$, т. е. рассматривая систему величин

$$\Lambda^{j_1 j_2 \ldots j_h a}_{i_1 i_2 \ldots i_h} = \delta^{j_1}_{i_1} \delta^{j_2}_{i_2} \ldots \delta^{j_h}_{i_h} \lambda^a, \qquad (11)$$

которая в подробной записи имеет вид

$$\Lambda^{i_1 i_2 \ldots i_h a}_{i_1 i_2 \ldots i_h} = \lambda^a \quad \left(\textit{по } i_1, i_2, \cdots i_h \textit{ не суммировать}\right),$$

$$\Lambda^{j_1 j_2 \ldots j_h a}_{i_1 i_2 \ldots i_h} = 0 \quad (i_1 \neq j_1 \textit{ или } i_2 \neq j_2 \ldots \textit{или } i_h \neq j_h),$$

мы, очевидно, получим n^h-кратное повторение того же самого исходного тензора $\{\lambda^a\}$, то есть ничего нового, что доказывает некорректность утверждений, приведенных в статьях [1—3]. Замена тензора $\{\lambda^a\}$ на любой геометрический объект $\left\{\Gamma^{b_1 b_2 \ldots b_q}_{a_1 a_2 \ldots a_p}\right\}$ приводит к аналогичному результату.

Список литературы

1. *Белова О.О.* Кручение групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 15—22.

2. *Белова О.О.* Индуцированная связность Нейфельда на дифференцируемом многообразии Грассмана // Там же. 2013. Вып. 44. С. 15—19.

3. *Шевченко Ю.И.* Классификация пространств проективной связности // Там же. 2014. Вып. 45. С. 144—157.

V. Malakhovsky, E. Shcherbak

About impossibility of using Kronecker's symbols as factors for obtaining new geometrical objects

It is shown that a given geometric object multiplied by a finite number of Kronecker's symbols are repeating many times the initial geometric object.