ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I4 1983

УДК 514.75

Е.А.М и т р о ф а н о в а

ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $A^p_m(n)$.

В статье показывается, что пространство параболоидов степени p и размерности m образуют относительно группы Ли $A^p_m(n)$ однородное пространство представления с естественными координатами.

Рассмотрим группу преобразований $A^p_m(n)$ пространства R^n, считая, что она действует левосторонним образом:

$$\tilde{x} = f(a,x) = a\cdot x = \begin{cases} \tilde{x}^i = a^i_k x^k + a^i, \\ \tilde{x}^u = a^u_v x^v + a^u + a^u_i x^i + \ldots + \frac{1}{p!} a^u_{i_1\ldots i_p} x^{i_1}\ldots x^{i_p}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\det\|a^i_k\| \neq 0$, $\det\|a^u_v\| \neq 0$; $i,j,k = \overline{1,m}$; $u,v,w = \overline{m+1,n}$; $p = 1,2,\ldots$

Геометрический характер действия группы $A^p_m(n)$ в пространстве R^n состоит в том, что преобразование (1) определяет послойные аффинные отображения расслоения $R^n \xrightarrow{pr} R^m$, индуцирующие аффинные преобразования в R^n. При этом свободный член в записи (1) аффинного отображения слоев расслоения $R^n \to R^m$ является полиномом p-го порядка относительно координат соответствующей точки базы.

Левоинвариантные формы θ^J группы $A^p_m(n)$ удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\theta^i = \theta^k \wedge \theta^i_k, \quad d\theta^i_k = \theta^j \wedge \theta^i_j,$$
$$d\theta^u = \theta^i \wedge \theta^u_i + \theta^v \wedge \theta^u_v, \quad d\theta^u_v - \theta^w_v \wedge \theta^u_w,$$
$$d\theta^u_i = \theta^v_j \wedge (\theta^u_v \delta^j_i - \theta^j_i \delta^u_v) + \theta^j \wedge \theta^u_{ij}, \tag{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d\theta^u_{i_1\ldots i_q} = \theta^v_{j_1\ldots j_q} \wedge (\theta^u_v \delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_q}_{i_q} - \theta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\ldots\delta^{j_q}_{i_q}\delta^u_v - \ldots - \theta^{j_q}_{i_q}\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_{q-1}}_{i_{q-1}}\delta^u_v) + \theta^j \wedge \theta^u_{i_1\ldots i_q j}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d\theta^u_{i_1\ldots i_p} = \theta^v_{j_1\ldots j_p} \wedge (\theta^u_v \delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_p}_{i_p} - \theta^{j_1}_{i_1}\delta^{j_2}_{i_2}\ldots\delta^{j_p}_{i_p}\delta^u_v - \ldots - \theta^{j_p}_{i_p}\delta^{j_1}_{i_1}\ldots\delta^{j_{p-1}}_{i_{p-1}}\delta^u_v), \tag{2}$$

где $q = 1,2,\ldots,p-1$,

которые позволяют выделить важную последовательность представлений этой группы. Согласно уравнениям (2) системы форм

$$(\theta^u_{i_1\ldots i_p},\ldots,\theta^u_{i_1\ldots i_q}),\ (\theta^u_{i_1\ldots i_p},\ldots,\theta^u_i,\theta^u) \tag{3}$$

вполне интегрируемы для всех q. Пусть

$$a^u = \bar{t}^u + \bar{t}^u_i a^i + \frac{1}{2}\bar{t}^u_{i_1 i_2} a^{i_1} a^{i_2} + \ldots + \frac{1}{p!}\bar{t}^u_{i_1\ldots i_p} a^{i_1}\ldots a^{i_p} \tag{4}$$

уравнение параболоида степени p и размерности m. Множество всех таких параболоидов образует относительно группы $A^p_m(n)$ однородное пространство представления $P^p_m(n)$ с естественными координатами $(\bar{t}^u, \bar{t}^u_i, \ldots, \bar{t}^u_{i_1\ldots i_p})$. Это представление имеет естественные проекции

$$P^p_m(n) \to P^q_m(n) = \{(\bar{t}^u_{i_1\ldots i_q},\ldots,\bar{t}^u_{i_1\ldots i_p})\},$$

каждое из которых также является однородным пространством представления группы $A^p_m(n)$. Геометрический смысл вполне интегрируемых систем (3) выражается следующей теоремой

Т е о р е м а. Первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\{\theta^u_{i_1\ldots i_p},\ldots,\theta^u_{i_1\ldots i_q}\}$ являются естественные координаты однородного пространства $P^q_m(n)$, а первыми интегралами всей системы (3) являются естественные координаты пространства параболоидов $P^p_m(n)$.