УДК 514.75

А. В. Вялова

Калининградский государственный технический университет

О способе Остиану обращения трехиндексных тензоров на примере точечно-плоскостной поверхности

В многомерном проективном пространстве рассматривается точечно-плоскостная поверхность. В предположении существования относительного нетривиального инварианта, построенного из компонент подтензора фундаментального объекта первого порядка поверхности, вводится обращенный фундаментальный подобъект этой поверхности. Способом Н.М. Остиану доказывается, что обращенный подобъект — тензор.

Ключевые слова: проективное пространство, точечно-плоскостная поверхность, фундаментальный объект первого порядка поверхности, относительный нетривиальный инвариант, обращенный фундаментальный подобъект поверхности.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, J, K = \overline{1, n})$ с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A$$

и структурными уравнениями проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$D\omega_I^J = \omega_I \wedge \omega^J + \omega_I^K \wedge \omega_K^J + \delta_I^J \omega_K \wedge \omega^K.$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим точечно-плоскостную поверхность S_{h+r}, представленную вырожденным многообразием троек (A, L_h, T_m), причем точка A $(A \in L_h \subset T_m)$ и касательная плоскость T_m ($m = h + r$, $n < m + hr$ [1]) описывают m-мерные семейства, а образующая L_h — r-мерное семейство.

Разобьем значения индекса I на следующие серии значений:

$$a,\ldots=\overline{1,h};\quad i,\ldots=\overline{h+1,m};\quad \alpha,\ldots=\overline{m+1,n};\quad u,\ldots=\overline{1,m}.$$

Поверхность $\mathrm{S}_{\mathrm{h+r}}$ задается уравнениями [1]

$$\omega^{\alpha}=0,\quad \omega_a^i=\Lambda_{aj}^i\omega^j,\quad \omega_a^{\alpha}=\Lambda_{ai}^{\alpha}\omega^i,\quad \omega_i^{\alpha}=\Lambda_{ia}^{\alpha}\omega^a+\Lambda_{ij}^{\alpha}\omega^j,$$

где совокупность функций $\Lambda^1=\{\Lambda_{aj}^i,\Lambda_{ai}^{\alpha}=\Lambda_{ia}^{\alpha},\Lambda_{ij}^{\alpha}\}$ составляет фундаментальный объект 1-го порядка поверхности. Компоненты объекта Λ^1 удовлетворяют соотношениям $\Lambda_{[ij]}^{\alpha}=0$ и системе дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{aligned}&\Delta\Lambda_{ai}^{\alpha}=\Lambda_{aiu}^{\alpha}\omega^u,\quad \Delta\Lambda_{aj}^i+\Lambda_{aj}^{\alpha}\omega_{\alpha}^i-\delta_j^i\omega_a=\Lambda_{aju}^i\omega^u,\\&\Delta\Lambda_{ij}^{\alpha}-\Lambda_{ai}^{\alpha}\omega_j^a-\Lambda_{aj}^{\alpha}\omega_i^a=\Lambda_{iju}^{\alpha}\omega^u,\end{aligned}\tag{1}$$

где тензорный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_{ai}^{\alpha}=d\Lambda_{ai}^{\alpha}-\Lambda_{bi}^{\alpha}\omega_a^b-\Lambda_{aj}^{\alpha}\omega_i^j+\Lambda_{ai}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}.$$

Утверждение. *Фундаментальный объект первого порядка* Λ^1 *поверхности* S_{h+r} *образует квазитензор, содержащий простейший и простой тензоры* $\{\Lambda_{ai}^{\alpha}\},\{\Lambda_{ij}^{\alpha},\Lambda_{ai}^{\alpha}\}$.

Предположим [3], что существует нетривиальный относительный инвариант, построенный из компонент фундаментального подобъекта 1-го порядка Λ_{ai}^{α}, то есть $I=I(\Lambda_{ai}^{\alpha})$. Пусть дифференциальное уравнение для относительного инварианта имеет вид

$$dI=I(\lambda\omega_a^a+\mu\omega_i^i+\nu\omega_{\alpha}^{\alpha})+I_u\omega^u,\tag{2}$$

где λ, μ, ν — некоторые коэффициенты, которые будут определены ниже.

Присоединим к плоскостной поверхности подобъект 1-го порядка $\{V_{\alpha}^{ai}\}$, компоненты которого являются частными производными логарифма инварианта по компонентам фундаментального подобъекта Λ_{ai}^{α}:

$$V_{\alpha}^{ai} = \frac{\partial \ln I}{\partial \Lambda_{ai}^{\alpha}}. \tag{3}$$

Этот объект будем называть обращенным подобъектом 1-го порядка точечно-плоскостной поверхности S_{h+r}. Из выражения (3) с учетом дифференциальных уравнений (1_1) следует

$$d\ln I = V_{\alpha}^{ai} d\Lambda_{ai}^{\alpha} \equiv V_{\alpha}^{ai}(\Lambda_{bi}^{\alpha}\omega_a^b + \Lambda_{aj}^{\alpha}\omega_i^j - \Lambda_{ai}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}) =$$
$$= V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{bi}^{\alpha}\omega_a^b + V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{aj}^{\alpha}\omega_i^j - V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}.$$

Преобразуя уравнение (2), находим

$$d\ln I \equiv \lambda\omega_a^a + \mu\omega_i^i + \nu\omega_{\alpha}^{\alpha} \ (\mathrm{mod}\,\omega^u).$$

Сопоставляя полученное, имеем

$$V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{bi}^{\alpha} = \lambda\delta_b^a, \quad V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{aj}^{\alpha} = \mu\delta_j^i, \quad V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\beta} = -\nu\delta_{\alpha}^{\beta}. \tag{4}$$

Сворачивая равенства (4) по индексам a и b, i и j, α и β, получим

$$V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha} = \lambda h, \quad V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha} = \mu r, \quad V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha} = -\nu(n-m),$$

откуда $\lambda = \frac{1}{h}V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha}$, $\mu = \frac{1}{r}V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha}$, $\nu = -\frac{1}{n-m}V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha}$.

Пусть $V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha} = hr(n-m)$, тогда $\lambda = r(n-m)$, $\mu = h(n-m)$, $\nu = -hr$. Следовательно, уравнение (2) для относительного инварианта I принимает вид

$$d\ln I = r(n-m)\omega_a^a + h(n-m)\omega_i^i - hr\omega_{\alpha}^{\alpha} + \tilde{I}_u\omega^u \quad \left(\tilde{I}_u = \frac{I_u}{I}\right).$$

Компоненты обращенного подобъекта V_{α}^{ai} связаны с компонентами подобъекта Λ_{ai}^{α} соотношениями

$$V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{bi}^{\alpha} = r(n-m)\delta_{b}^{a},\ V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{aj}^{\alpha} = h(n-m)\delta_{j}^{i},\ V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\beta} = hr\delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (5)$$

Найдем дифференциальные уравнения для компонент V_{α}^{ai}. Для этого рассмотрим свертку $V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha}$ и продифференцируем ее с учетом соотношений (5)

$$\Delta V_{\alpha}^{ai}\Lambda_{ai}^{\alpha} + V_{\alpha}^{ai}\Delta\Lambda_{ai}^{\alpha} = 0.$$

Учитывая дифференциальные уравнения (1_1) для компонент фундаментального подобъекта Λ_{ai}^{α}, получим

$$\Lambda_{ai}^{\alpha}\Delta V_{\alpha}^{ai} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^{u}).$$

Так как все компоненты Λ_{ai}^{α} независимы между собой, то

$$\Delta V_{\alpha}^{ai} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\omega^{u}).$$

Таким образом, обращенный подобъект 1-го порядка является тензором.

Вывод. *Предположение существования относительного нетривиального инварианта, построенного из компонент подтензора фундаментального объекта первого порядка поверхности, позволяет ввести обращенный фундаментальный подобъект этой поверхности. Способом Н. М. Остиану удается находить сравнения на обращенный подобъект без привлечения выражений на его компоненты.*

Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* Оснащения плоскостной поверхности, рассматриваемой с трех точек зрения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1993. Вып. 24. С. 112—123.

2. *Skriagina A.* The structure of equipment of centered plane surface // New Geometry of Nature. Kazan, 2003. P. 197—200.

3. *Остиану Н.М.* Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве // Труды геометрического семинара. М., 1969. Т. 2. С. 247—262.

A. Vyalova

On the Ostianu mode for inverting three-indexes tensors with an example of point-plane surface

In many-dimensional projective space the point-plane surface is considered. Assuming the existence of relative non-trivial invariant constructed from the components of subtensor of the first order fundamental object of surface, the inverted fundamental subobject of the surface is introduced. By the mode of N. M. Ostianu it is proved, that the inverted subobject is tensor.

УДК 514.76

М. В. Глебова

Пензенский государственный университет

Продолжение векторных полей с гладких многообразий на их прямое произведение

Описано построение продолжений векторных полей с гладких многообразий в прямое произведение этих гладких многообразий.

Ключевые слова: векторное поле, гладкое многообразие, прямое произведение многообразий.

Рассмотрим гладкие многообразия ${}^{a}M_{n_a}$ размерности n_a $(a=1,2)$ класса C^{∞}. Обозначим через $C^{\infty}({}^{a}M_{n_a})$ алгебру глад-