УДК 514.75

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЕМ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА В ПРОСТРАНСТВО ГИПЕРКВАДРИК

И.С.А л е ш н и к о в

(*Калининградский государственный университет)*

В настоящей работе продолжается изучение локального дифференцируемого отображения f [5] аффинного пространства A_n в пространство R(q) гиперквадрик другого аффинного пространства A_m. Вводятся две аффинные связности, являющиеся обобщениями для отображения f связности Врэнчану [2,§5] точечного соответствия, и изучаются их геометрические свойства. Специальный случай отображения f и соответствующих связностей рассматривался в статье [4].

Будем считать n=N, где N=m+$\frac{1}{2}$m(m+1) - ранг [1] гиперквадрики q$\in$R(q). Из предположения о максимальности ранга отображения f следует, что существует обратное к f локальное дифференцируемое отображение f^{-1}:R(q)$\to A_n$. Оно задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\Omega^J = V_i^J \omega^i + V^{Jij} \nabla a_{ij} \; (V^{Jij} = V^{Jji}) .$$

Из равенств $f \circ f^{-1} = id_{R(q)}$, $f^{-1} \circ f = id_{A_n}$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \Lambda^i{}_J V_i^K + \Lambda_{ijJ} V^{Kij} = \delta_J^K, \Lambda_{ijJ} V^{Jpq} = \frac{1}{2}\delta^p_{(i}\delta^q_{j)}, \\ \Lambda^i{}_J V_j^J = \delta^i{}_j, \Lambda^i{}_J V^{Jpq} = 0, \Lambda_{ijJ} V_k^J = 0, \end{cases} \tag{1}$$

причем:

$$\begin{cases} \nabla \Lambda^i{}_J = \Lambda^i{}_{JK} \Omega^K, \nabla \Lambda_{ijJ} = \Lambda_{ijJK} \Omega^K, \\ \nabla V_i^J = -V_i^K (V_j^J \Lambda^j_{KL} + V^{Jpq} \Lambda_{pqKL}) \Omega^L, \\ \nabla V^{Jij} = -V^{Kij} (V_k^J \Lambda^k_{KL} + V^{Jpq} \Lambda_{pqKL}) \Omega^L, \end{cases} \tag{2}$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla \Lambda^i_J = d\Lambda^i_J - \Lambda^i_K \Omega^K_J + \Lambda^j_J \omega^i_j .$$

Пусть отображение f имеет в окрестности точки $P^0 \in A_n$ следующее разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ijJ} X^J + \frac{1}{2}\Lambda_{ijJK} X^J X^K + \langle 3 \rangle, \\ c^i = \Lambda^i{}_J X^J + \frac{1}{2}\Lambda^i{}_{JK} X^J X^K + \langle 3 \rangle. \end{cases} \tag{3}$$

В силу того, что координаты c^i центра гиперквадрики q$\in$R(q) с уравнением:

$$b_{ij} x^i x^j + 2 b_i x^i - 1 = 0$$

удовлетворяют соотношениям $b_{ij} c^j + b_i = 0$, получаем:

$$b_i = \Lambda_{iJ} X^J + \tfrac{1}{2} \Lambda_{iJK} X^J X^K + \langle 3 \rangle, \tag{4}$$

где

$$\Lambda_{iJ} = -a_{ij} \Lambda^j_J, \Lambda_{iJK} = -a_{ij} \Lambda^j_{JK} - \Lambda_{ij(J} \Lambda^j_{K)}.$$

Рассмотрим тензор $V^{Ji} = -a^{ji} V^J_j$, где a^{ji} определяются равенством $a_{ik} a^{kj} = \delta^j_i$.

Теорема 1. Функции

$$\Gamma^J_{KL} = \Lambda_{ijKL} V^{Jij} + \Lambda^i_{KL} V_i^J,$$
$$\gamma^J_{KL} = \Lambda_{ijKL} V^{Jij} + \Lambda_{iKL} V^{Ji}$$

задают две локально-аффинные связности Γ и γ в пространстве A_n.

Доказательство. Обозначим ${}^\Gamma\Omega^J_K = \Omega^J_K + \Gamma^J_{KL} \Omega^L$. Из уравнений :

$$\nabla \Lambda^i_{JK} = \Lambda^i_{JKL} \Omega^L, \nabla \Lambda_{ijJK} = \Lambda_{ijJKL} \Omega^L,$$
$$\nabla \Lambda_{iJ} = -(a_{ij} \Lambda^j_{JK} + \Lambda_{ijK} \Lambda^j_J) \Omega^K,$$
$$\nabla V^{Ji} = -V^{Ki} (V^J_j \Lambda^j_{KL} + V^{Jpq} \Lambda_{pqKL}) \Omega^L - a^{ij} V^{Jk} \Lambda_{jkL} \Omega^L$$

вытекают уравнения структуры пространства аффинной связности:

$$D\Omega^J = \Omega^L \wedge {}^\Gamma\Omega^J_L + \tfrac{1}{2} {}^\Gamma S^J_{LH} \Omega^L \wedge \Omega^H,$$
$$D\,{}^\Gamma\Omega^J_K = {}^\Gamma\Omega^L_K \wedge {}^\Gamma\Omega^J_L + \tfrac{1}{2} {}^\Gamma R^J_{LHK} \Omega^L \wedge \Omega^H,$$

где ${}^\Gamma S^J_{LH} = 0$ и ${}^\Gamma R^J_{LHK} = 0$. Последнее означает, что Γ^J_{KL} задает в A_n локально-аффинную связность Γ [3]. Для γ^J_{KL} доказательство аналогич но.

Теорема 2. Коэффициенты Γ^J_{KL} связности Γ удовлетворяют соотношениям:

$$\Lambda_{ijJK} = \Lambda_{ijL} \Gamma^L_{JK}, \Lambda^i_{JK} = \Lambda^i_L \Gamma^L_{JK}. \tag{5}$$

Доказательство непосредственно вытекает из определения функций Γ^J_{KL} и соотношений (1).

Теорема 3. Для коэффициентов γ^J_{KL} связности γ справедливы рвенства:

$$\Lambda_{ijJK} = \Lambda_{ijL} \gamma^L_{JK}\ ,\ \Lambda_{iJK} = \Lambda_{iL} \gamma^L_{JK}.$$

Доказательство. Из (1) получаем:

$$\begin{cases} \Lambda_{iJ} V^{Ki} + \Lambda_{ijJ} V^{Kij} = \delta^K_J, \Lambda_{ijJ} V^{Jpq} = \tfrac{1}{2} \delta^p_{(i} \delta^q_{j)}, \\ \Lambda_{iJ} V^{Jj} = \delta^j_i, \Lambda_{iJ} V^{Jpq} = 0, \Lambda_{ijJ} V^{Jk} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда равенства (6) непосредственно следуют из определения функций γ^J_{KL} и соотношений (7).

Замечание. В силу уравнений (5.2) статьи [2] теоремы 2 и 3 позволяют рассматривать связности Γ и γ как обобщения связности Врэнчану точечного соответствия для отображения $f: A_n \to R(q)$ аффинногопространства A_n в пространство гиперквадрик R(q).

Используя понятие цепи гиперквадрик в пространстве R(q), введенное в работе [5], получаем следующие свойства геодезических связностей Γ и γ.

Теорема 4. Образ геодезической в связности Γ при отображении f имеет в точке $f(P^0)$ касание 2-го порядка с цепью гиперквадрик.

Доказательство. Пусть l-геодезическая связности Γ, l(0)=P^0. Ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $0\in R$ имеет вид:

$$X^J = \Lambda^J t - \tfrac{1}{2}\Gamma^J_{KL}\Lambda^K\Lambda^L t^2 + \langle 3\rangle. \qquad (8)$$

Из формул (3) и (8) для отображения $f\circ l$ имеем:

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ijJ}\Lambda^J t + \tfrac{1}{2}(\Lambda_{ijJK} - \Lambda_{ijL}\Gamma^L_{JK})\Lambda^J\Lambda^K t^2 + \langle 3\rangle,$$
$$c^i = \Lambda^i_J\Lambda^J t + \tfrac{1}{2}(\Lambda^i_{JK} - \Lambda^i_L\Gamma^L_{JK})\Lambda^J\Lambda^K t^2 + \langle 3\rangle.$$

Тогда в силу (5) получаем:

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ijJ}\Lambda^J t + \langle 3\rangle, c^i = \Lambda^i_J\Lambda^J t + \langle 3\rangle,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 5. Образ геодезической связности γ при отображении f имеет в точке $f(P^0)$ касание 2-го порядка с пучком гиперквадрик пространства R(q).

Доказательство. Пусть l-геодезическая связности γ, l(0)= P^0. В окрестности точки $0\in R$ она имеет следующее разложение в ряд Тейлора:

$$X^J = \Lambda^J t - \tfrac{1}{2}\gamma^J_{KL}\Lambda^K\Lambda^L t^2 + \langle 3\rangle. \qquad (9)$$

Так как разложение отображения f в окрестности точки P^0 имеет вид:

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ijJ}X^J + \tfrac{1}{2}\Lambda_{ijJK}X^J X^K + \langle 3\rangle,$$
$$b_i = \Lambda_{iJ}X^J + \tfrac{1}{2}\Lambda_{iJK}X^J X^K + \langle 3\rangle,$$

то в силу (6) и (8) для отображения $f\circ l$ имеем:

$$b_{ij} = a_{ij} + \Lambda_{ijJ}\Lambda^J t + \langle 3\rangle, b_i = \Lambda_{iJ}\Lambda^J t + \langle 3\rangle.$$

Последнее означает, что $f\circ l$ соприкасается с пучком гиперквадрик $\lambda F + \mu\Phi = 0$, где $F = a_{ij}x^i x^j - 1, \Phi = \Lambda_{ijJ}\Lambda^J x^i x^j + 2\Lambda_{iJ}\Lambda^J x^i$.

Теорема 6. Направление, определяемое в точке P^0 инфлексионной в ней кривой l, является характеристическим направлением отображения f тогда и только тогда, когда кривая l имеет в точке P^0 геометрическое касание 2-го порядка с некоторой геодезической связности Γ.

Доказательство. Пусть $\{\Lambda^J\}$ является характеристическим направлением в точке P^0 отображения f. Из [5] следует, что это равносильно

$$\begin{cases} \Lambda_{ijKL}\Lambda^K\Lambda^L = \mu\Lambda_{ijK}\Lambda^K, \\ \Lambda^i_{KL}\Lambda^K\Lambda^L = \mu\Lambda^i_K\Lambda^K. \end{cases} \quad (\mu\in R) \qquad (10)$$

С учетом соотношений (1) получаем:

$$\Gamma^J_{KL}\Lambda^K\Lambda^L = \mu\Lambda^J .$$

Последнее означает, что кривая:

$$X^J = \Lambda^J t - \tfrac{1}{2}\Gamma^J_{KL}\Lambda^K\Lambda^L t^2 + \langle 3\rangle$$

является инфлексионной в точке P^0 кривой, соприкасающейся с некоторой геодезической связности Г.

Проводя рассуждения в обратном порядке и учитывая (5), получаем требуемый результат.

Библиографический список

1. Малаховский В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометрич. семинара / ВИНИТИ. М.,1969. Т.2. С.179-206.

2. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия. 1963. Итоги науки и техники / ВИНИТИ. М.,1965. С.65-107.

3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

4. Андреев Б.А. Характеристические и гипохарактеристические направления отображения *f* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1983. Вып.14. С.9-13.

5. Алешников И.С. Характеристические направления отображе-ния аффинного пространства в пространство гиперквадрик // Там же, 1995. Вып.26. С.5-8.

I.S.A l e s h n i k o v

AFFINE CONNECTIONS GENERATED BY THE MAPPING FROM THE AFFINE SPACE TO THE SPACE OF HYPERQUADRIC

The present work conciders a local differentiable mapping f of the affine space A_n to the space R(q) of hyperquadrics of the affine space A_m , where n=dimR(q). Two affine connections Ã and γ are introduced in the space A_n which are the generalization of known Vrănceanu′s connections of point mapping for the case of mapping f and their geometrics properties are investigated.

It is calculated the order of tangency of the image under the mapping f of a geodesic line of the connection Ã with the chain of hyperquadrics of the space R(q) which was introduced in the previous work. It is also calculated the order of tangency of the image under the mapping f of a geodesice line of the connection γ with the bunch of hyperquadrics of the space R(q) tangent to the mapping f.

Besides this, the symptom of the characteristic direction of the mapping f at the point P^0 is found.

УДК 514.75

СТРУКТУРЫ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ В ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОЛОС