

В. А. Пахотин, К. В. Власова

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
УГЛОВЫХ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА
МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ**

Представлен новый метод обработки информации в системах локации. Он основан на положениях теории оптимального приема. В качестве принятого сообщения используется зависимость напряжения на выходе локационного приемника от угла сканирования диаграммой направленности антенной системы. Приводятся теоретические положения и результаты предварительных модельных расчетов. Показана возможность увеличения азимутального разрешения двух целей без изменения пространственной базы сигнала.

The new method of processing of the information in location systems is presented. It is based on positions of the theory of optimum reception. As the accepted message dependence of pressure on an exit radar-tracking the receiver from a corner of scanning is used by the diagramme of an orientation of antenna system. Theoretical positions and results of preliminary modeling calculations are resulted. Possibility of increase in the azimuthal permission of two purposes without change of spatial base of a signal is shown.

Ключевые слова: угловое преобразование Фурье, апертура антенной системы, функция правдоподобия, разрешение по азимуту.

Key words: angular transformation of Fure, the aperture of antenna system, credibility function, the permission on an azimuth.

Введение

В настоящее время для решения задачи разрешения целей в локации используется классический (Рэлеевский) подход. Он основан на анализе функции неопределенности [1; 2] и широко известен в частотной и угловой спектроскопии, оптике, локации, астрономии. Основным ограничением разрешающей способности в этом подходе является известное в радиотехнике соотношение неопределенности, задающее размер сечения функции неопределенности. Однако классический подход к решению задачи разрешения подобных сигналов не является оптимальным. Оптимальным классическое решение будет лишь при коэффициенте корреляции между сигналами, равном нулю, т. е. при ортогональных сигналах.

Теория оптимального приема, в частности метод максимального правдоподобия, позволяет развить другой подход к решению задачи разрешения подобных сигналов. Он основан на анализе поверхности функционала правдоподобия, представленной в многомерном пространстве азимутов. При этом азимуты всех целей оцениваются по единственному глобальному минимуму функционала. Классического понятия о разрешающей способности при этом не требуется. Разрешение целей по азимуту определяется в основном отношением сигнал/шум. При бесконечно большом отношении сигнал/шум разрешение целей может быть бесконечно большим.

Основные теоретические положения

Рассмотрим новый подход к решению задачи разрешения целей по азимуту. Будем рассматривать случай суперпозиции двух сигналов ($M=2$). В этом случае принятое сообщение можно записать в виде

$$\hat{Y}(\alpha) = \hat{U}_{01} f(\alpha, \alpha_1) + \hat{U}_{02} f(\alpha, \alpha_2) + \hat{U}_\phi(\alpha) \quad (1)$$

где $\hat{U}_{01}, \hat{U}_{02}$ – комплексные амплитуды сигналов, представленных в азимутальном пространстве;

$f(\alpha_1, \alpha_2)$ – азимутальные зависимости сигналов с направлений α_1, α_2 ;

$\hat{U}_\phi(\alpha)$ – аддитивный гаусовский шум со средним значением, равным нулю и дисперсией σ^2 .

Интервал корреляции шумовой составляющей определяется пространственным фильтром Фурье, $\tau_\alpha = \lambda/\alpha$.

На основе выражения (1) запишем функционал правдоподобия

$$\Delta(\hat{U}_{01}, \hat{U}_{02}, \alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} |\hat{Y}(\alpha) - \hat{U}_{01} f(\alpha, \alpha_1) - \hat{U}_{02} f(\alpha, \alpha_2)|^2 d\alpha, \quad (2)$$

где $\hat{U}_{01}, \hat{U}_{02}$ – оценочные (штрихованные) значения амплитуд составляющих сигнала;
 α_1', α_2' – оценочные значения азимутов плоских волн.

Дифференцируя выражение (2) по оценочным амплитудам и приравнивая дифференциалы к нулю, получим систему уравнений правдоподобия. Они дают следующие решения

$$\begin{aligned} \hat{U}_{01}(\alpha_1', \alpha_2') &= \frac{\overline{\hat{Y}(\alpha) f(\alpha, \alpha_1')} - R(\alpha_1', \alpha_2') \overline{\hat{Y}(\alpha) f(\alpha, \alpha_2')}}{f^2(\alpha, \alpha_1') - R^2(\alpha_1', \alpha_2')}, \\ \hat{U}_{02}(\alpha_1', \alpha_2') &= \frac{\overline{\hat{Y}(\alpha) f(\alpha, \alpha_2')} - R(\alpha_1', \alpha_2') \overline{\hat{Y}(\alpha) f(\alpha, \alpha_1')}}{f^2(\alpha, \alpha_2') - R^2(\alpha_1', \alpha_2')}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$R(\alpha_1', \alpha_2') = \frac{\overline{f(\alpha, \alpha_1') f(\alpha, \alpha_2')}}{\left(\overline{f^2(\alpha, \alpha_1')} \overline{f^2(\alpha, \alpha_2')} \right)^{1/2}}$$

– коэффициент корреляции между сигналами в азимутальном пространстве; черта сверху означает интегрирование по азимуту α .

В этих выражениях значения оценочных азимутов α_1', α_2' произвольные. Однако если выражения для $\hat{U}_{01}(\alpha_1', \alpha_2')$ и $\hat{U}_{02}(\alpha_1', \alpha_2')$ подставить в функционал правдоподобия (2), то исключается зависимость функционала от амплитуд сигнала. Остается зависимость только от оценочных азимутов. Возведем выражение (2) в квадрат и учтем уравнения правдоподобия, тогда выражение для функционала правдоподобия запишется в виде

$$\Delta(\alpha_1', \alpha_2') = \overline{|\hat{Y}(\alpha)|^2} - \hat{U}_{01}(\alpha_1', \alpha_2') \overline{\hat{Y}(\alpha) f(\alpha, \alpha_1')^*} - \hat{U}_{02}(\alpha_1', \alpha_2') \overline{\hat{Y}(\alpha) f(\alpha, \alpha_2')^*}, \quad (4)$$

где знак «*» обозначает комплексное сопряжение.

Полученное выражение определяет поверхность функционала правдоподобия в двумерном пространстве оценочных азимутов α_1', α_2' . Минимум этой поверхности определяет одновременно азимуты на первую и вторую цели, а с учетом (3) и амплитуды сигналов. Таким образом, задача оказывается решенной.

Если коэффициент корреляции $R(\alpha_1', \alpha_2')$ равен нулю, решения, полученные на основе выражений (3) и (4), совпадают с классическими решениями. Но если коэффициент корреляции не равен нулю, тогда решения определяются по минимуму поверхности функционала правдоподобия в пространстве оценочных азимутов. Решения, полученные на основе минимума функционала правдоподобия, являются несмещенными. Математическое ожидание от амплитуд $\hat{U}_{01}(\alpha_1', \alpha_2')$ и $\hat{U}_{02}(\alpha_1', \alpha_2')$ в выражениях (3) в точке поверхности функционала $\alpha_1' = \alpha_1, \alpha_2' = \alpha_2$ дает точное значение амплитуд

$$M(\hat{U}_{01}(\alpha_1', \alpha_2')) = \hat{U}_{01}, M(\hat{U}_{02}(\alpha_1', \alpha_2')) = \hat{U}_{02}.$$

Значение функционала правдоподобия в минимуме при $\alpha_1' = \alpha_1, \alpha_2' = \alpha_2$ и $\hat{U}_{01}(\alpha_1', \alpha_2') = \hat{U}_{01}, \hat{U}_{02}(\alpha_1', \alpha_2') = \hat{U}_{02}$ равно по определению (2) дисперсии шума σ^2 .

Оценим дисперсии оценочных амплитуд $\hat{U}_{01}(\alpha_1', \alpha_2')$ и $\hat{U}_{02}(\alpha_1', \alpha_2')$ в точке максимума функции правдоподобия при значениях $\alpha_1' = \alpha_1, \alpha_2' = \alpha_2$. Для этого запишем логарифм функции правдоподобия

$$\ln \Delta(\hat{U}_{01}, \hat{U}_{02}) = -\frac{1}{2\sigma^2\tau} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} |\hat{Y}(\alpha) - \hat{U}_{01} f(\alpha, \alpha_1) - \hat{U}_{02} f(\alpha, \alpha_2)|^2 d\alpha.$$

Выполняя двойное дифференцирование логарифма функции правдоподобия по амплитудам сигнала, можно получить элементы информационной матрицы Фишера

$$J_{11} = \frac{1}{\sigma^2 \tau_\alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(\alpha, \alpha_1) d\alpha, \quad J_{22} = \frac{1}{\sigma^2 \tau_\alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(\alpha, \alpha_2) d\alpha,$$

$$J_{12} = J_{21} = \frac{1}{\sigma^2 \tau_\alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\alpha, \alpha_1) f(\alpha, \alpha_2) d\alpha.$$

Матрица, обратная информационной матрице Фишера, определяет дисперсии Рао – Крамера для амплитуд сигналов D_{U1}, D_{U2} , содержащихся в принятом сообщении

$$D_{U1} = D_{U2} = \frac{\sigma^2 \tau_\alpha}{\left(1 - R^2(\alpha_1, \alpha_2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(\alpha, \alpha_1) d\alpha \right)} = \frac{\sigma^2}{\left(-R^2(\alpha_1, \alpha_2) A \right)}. \quad (5)$$

При выводе данных выражений учтено следующее:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(\alpha, \alpha_1) d\alpha = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(\alpha, \alpha_2) d\alpha = A \Delta \alpha = A \tau_\alpha,$$

где A – определяет среднее значение функции под интегралом на интервале $\Delta \alpha = \tau_\alpha$.

Согласно выражению (5), минимальная дисперсия будет при коэффициенте корреляции между сигналами в азимутальном пространстве, равном нулю. Однако при малом значении дисперсии шума (большое отношение сигнал/шум) разрешение целей возможно и при значениях $R(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$

$$R(\alpha_1, \alpha_2) \approx \sqrt{\frac{-\sigma^2}{A}}.$$

Например, при типичном отношении сигнал/шум, равном 20 дБ, коэффициент корреляции между сигналами будет равен 0,98. Это означает, что при степени перекрытия диаграмм направленностей, равной 0,98, при приеме двух близких по азимуту целей они могут быть разрешены.

Результаты модельных расчетов

Рассмотрим результаты модельных расчетов. В качестве модели сигналов используется азимутальный спектр, полученный при сканировании диаграммой направленности цилиндрического параболического зеркала антенной системы (3). Для оценок азимутов плоских волн, отраженных от целей, используется метод перебора по азимутам α'_1, α'_2 на площадке размером $-\pi/2, \pi/2$ с дискретностью один градус. Перебирая все значения α'_1, α'_2 , можно получить поверхность функционала правдоподобия $\Delta(\alpha'_1, \alpha'_2)$. Минимум поверхности функционала определяет решения: $\alpha'_1, \alpha'_2, \hat{U}_{01}, \hat{U}_{02}$.

На рисунке 1 показан результат сканирования диаграммой направленности приемной параболической антенной системой в пределах $\pm \pi/2$. Принимаются две плоские волны с азимутами $\alpha_1 = 24^\circ, \alpha_2 = 40^\circ$.

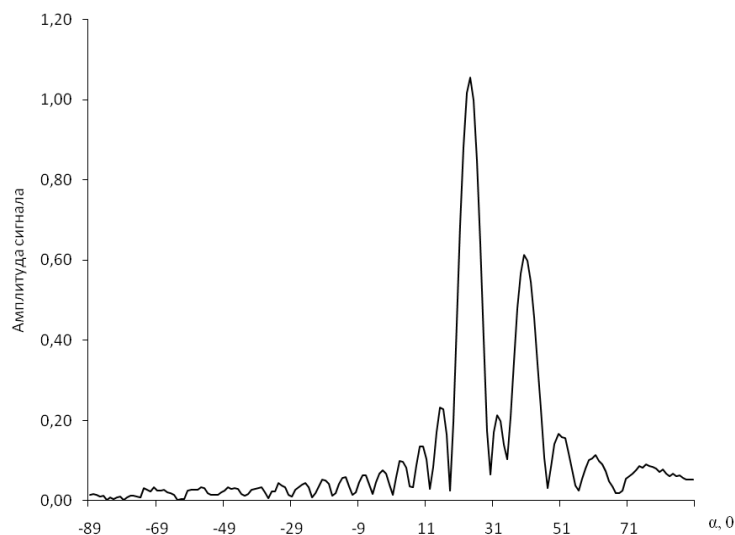


Рис. 1

Антенной системой они преобразуются в суперпозицию двух азимутальных спектров, являющихся в данном изложении двумя сигналами с амплитудами $U_1=1$, $U_2=0,5$ и начальными фазами $\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=30^\circ$. Коэффициент корреляции между сигналами при таких азимутах равен нулю и возможно классическое решение задачи разделения двух целей по азимуту по двум не перекрывающимся максимумам.

Решение новым методом определяется максимумом функционала $\Delta_1(\alpha'_1, \alpha'_2) = 1/\Delta(\alpha'_1, \alpha'_2)$, обратного к функционалу правдоподобия. Для данного случая поверхность обратного функционала представлена на рисунке 2.

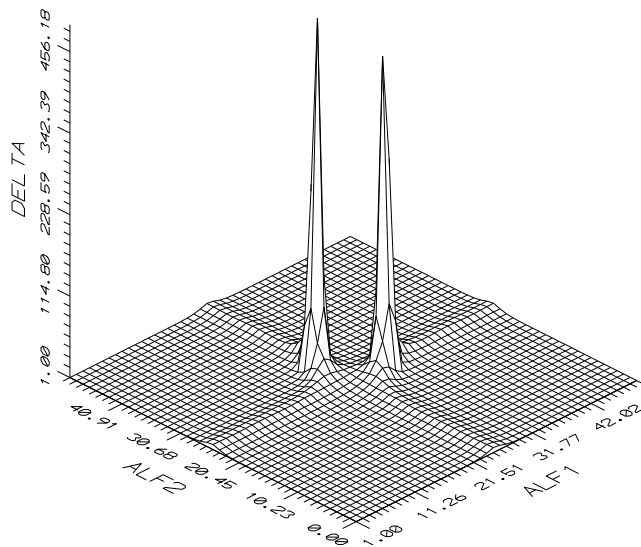


Рис. 2

Отмечается два максимума поверхности функционала, один из которых является зеркальным. Первый максимум дает решение α'_1, α'_2 . Второй зеркальный максимум — α'_2, α'_1 . Таким образом, принимая во внимание один из максимумов, можно получить сразу два азимутальных направления на цели. Классического понятия разрешающей способности здесь не требуется. Наличие зеркального максимума позволяет ввести новое представление об азимутальном разрешении. Оно связано со следующим: при сближении двух целей по азимуту зеркальный максимум приближается к истинному. Они могут слиться в единый максимум. Однако это зависит от отношения сигнал/шум. В пределе, когда отношение сигнал/шум стремится к бесконечности, основания максимумов стремятся к нулю, и максимумы превращаются в две δ -функции. Таким образом, в новом методе расчета разрешение зависит от отношения сигнал/шум, и оно не связано с размером антенной системы.

Если азимуты двух плоских волн сблизить ($\alpha_1 = 24^\circ$, $\alpha_2 = 26^\circ$, коэффициент корреляции равен 0,844), тогда диаграммы направленности могут сливаться вместе и классическими методами разрешить две цели невозможно (рис. 3).

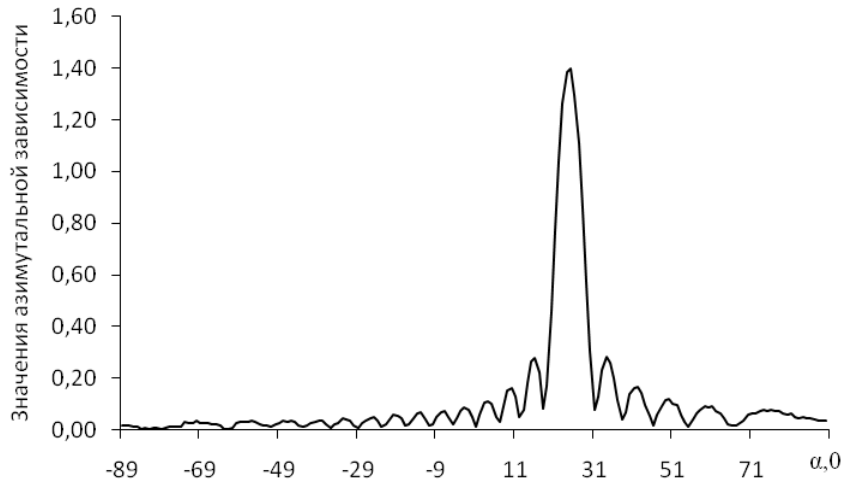


Рис. 3

Однако приведенный в работе метод позволяет и в этом случае решить задачу разрешения двух целей по азимуту. На рисунке 4 представлена поверхность обратного функционала для этого случая и отмечается наличие основного и зеркального максимумов. По основному максимуму получены следующие оценочные данные: $\alpha_1 = 24^\circ$, $\alpha_2 = 40^\circ$ и $U'_{01} = 1,0045$, $U'_{02} = 0,495$. Они достаточно хорошо соответствуют модельным данным: $\alpha_1 = 24^\circ$, $\alpha_2 = 40^\circ$ и $U'_{01} = 1,0$, $U'_{02} = 0,5$. Хорошее соответствие модельных и оценочных данных объясняется высоким отношением сигнал/шум (30 дБ). В этом случае значение обратного функционала в максимуме равно 1690.

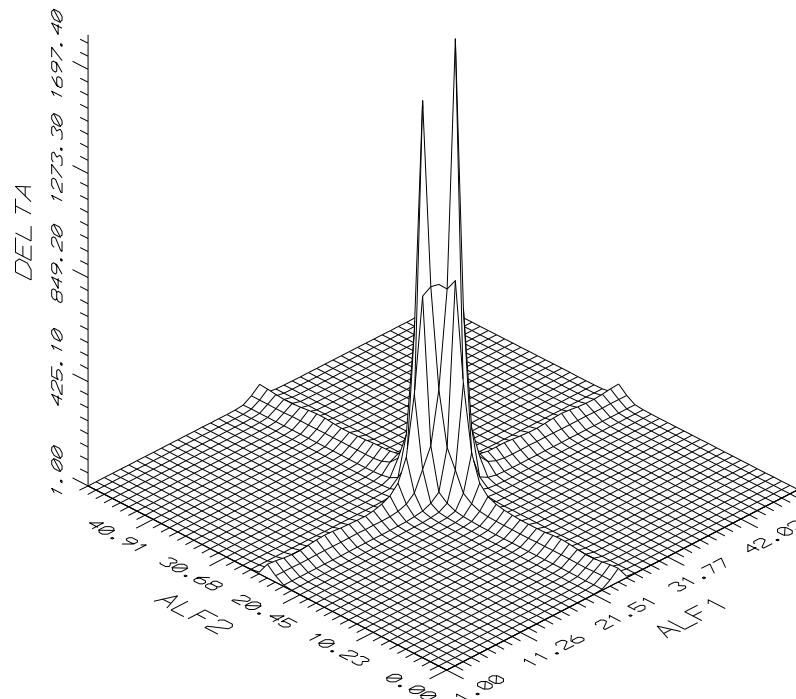


Рис. 4

Таким образом, результаты модельных расчетов показали возможность увеличения разрешения двух целей по азимуту без увеличения пространственной базы сигнала.

Зависимость оценочных параметров сигнала от отношения сигнал/шум представлена в таблице. В первой строчке таблицы — модельные данные. Различие азимутов на цели мало. Полуширина диаграммы направленности равна 6° . Классический метод обработки не может

разделить эти две цели. В расчетах по новой методике получено следующее. При уменьшении отношения сигнал/шум от 35 до 13 дБ азимут первой цели определяется уверенно. Азимут второй цели при малых значениях отношения сигнал/шум отклоняется на один градус. Амплитуды сигналов отличаются от модельных значений незначительно.

№	Сигнал/шум	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	U_1	U_2
	Модельные значения	26	24	1	0,5
1	35	26	24	1,002	0,49
2	29	26	24	1,004	0,48
3	20	26	24	0,93	0,65
4	15	26	23	0,95	0,6
5	13	26	23	0,97	0,58

Заключение

В настоящей работе представлен новый метод решения задачи разрешения целей по азимуту. Он основан на положениях теории оптимального приема, которые применены к сигналам в азимутальном пространстве. Азимутальное пространство создается за счет сканирования диаграммой направленности в азимутальном секторе. Сигналом является спектр плоской волны. Разрешающая способность в методе определяется функцией правдоподобия, а не на основании функции неопределенности, как в классике. Разрешающая способность в новом методе зависит от отношения сигнал/шум и не связана непосредственно с пространственной базой сигнала. Предварительные модельные расчеты показали возможность увеличения разрешения целей по азимуту при обработке информации представленным методом.

Список литературы

1. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем: учеб. пособие для вузов. М., 2003.
2. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М., 1983.
3. Дробкин А. Л., Зузенко В. Л., Кислов А. Г. Антенно-фидерные устройства. Изд. 2-е. М., 1974.
4. Книхута Е. В., Пахотин В. А. и др. Решение задачи оценки параметров сигнала в частотном пространстве // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2005. Вып. 2.

Об авторах

В. А. Пахотин — д-р физ.-мат. наук, проф., РГУ им. И. Канта.
К. В. Власова — канд. физ.-мат. наук, БГАРФ.

Authors

V. Pakhotin — Prof., IKSUR.
K. Vlasova — Dr., BSAFF.