УДК 514.76

К. В. Полякова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-6

Аналоги симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны

Изучается аффинная связность в расслоении, ассоциированном с многообразием, структурные уравнения и деривационные формулы которого построены с помощью деформаций внешнего и обычного дифференциалов. Кривизна и кручение аффинной связности на этом многообразии не являются тензорами. Доказано, что если тензор деформации связности симметричен или равен нулю, то связность является полусимметрической. Построен аналог симметрической плоской связности, названный простой связностью. Кручение и кривизна этой связности выражаются через симметричный тензор деформации связности. Каноническая связность является частным случаем простой связности, она плоская и несимметричная.

Ключевые слова: касательное пространство 2-го порядка, возмущение дифференциала, несимметричные реперы и кореперы 2-го порядка, объекты кручения и кривизны, плоская связность, полусимметрическая связность

1. Введение

В работах [6; 7] изучается многообразие $\breve{X}_m$ с несимметричными векторами касательного пространства 2-го и несимметричными формами дифференциальной группы 2-го порядка. Изучение $\breve{X}_m$ проводится с использованием отображений

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

$$\breve{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\wedge^2 T^*},$$
$$\breve{d}v = dv + d(v(f^\xi))\partial_\xi\big|_{T^*},$$

где

$$f = f(x^i, x^\xi),\ f^\xi = f^\xi(x^i),$$
$$v = v^i\partial_i,\ d\big(v(f^\xi)\big) = v^i d(\partial_i f^\xi).$$

Эти отображения представляют собой деформации дифференциалов D и d в кокасательном T^*X_m и касательном TX_m пространствах многообразия X_m. Здесь $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial x^\xi}$, причем x^j — локальные координаты точки на многообразии, то есть x^j — базисные координаты, x^ξ — слоевые координаты. Индексы принимают следующие значения:

$$i, j, k\ =\ 1, \dots, m;\ \ \xi =\ m+1, \dots, m+m^2.$$

Поскольку дифференциалы деформируются, то можно считать, что и само многообразие $\breve{X}_m$ представляет собой деформацию обычного гладкого многообразия X_m, вследствие чего оно названо *деформирующимся* (см. также: [5; 13]). В данной статье продолжаем рассматривать случай $\big(x^\xi\big) = (x^i_j)$ и $f^\xi = f|_{x^\xi=1,\text{остальные}=0}$. Слоевые координаты 1-го порядка x^i_j образуют невырожденную матрицу с обратной матрицей $(\overset{*}{x}{}^i_j)$.

В основу всех построений положены соотношения

$$\breve{D}(dx^i) = \overline{N}^i_{jk}dx^j \wedge dx^k,\ \ \breve{d}(\partial_i) = \Big(\partial_{ij} + \overline{N}^\xi_{ij}\partial_\xi\Big)\otimes dx^j,$$

где кососимметрический $\overline{N}^i_{jk} = \delta^i_{[k}\partial_{j]}f$ и симметрический $\overline{N}^\xi_{ij} = \partial_{ij}f^\xi$ объекты задают возмущения дифференциалов $\breve{D}$ и $\breve{d}$ на элементах dx^i и ∂_i. Причем, например, $\breve{D}g(x^i, x^\xi) = dg$, $\breve{D}(df) = 0$, $\breve{D}\big(dx^\xi\big) = 0$; кроме того, вдоль любой линии ρ на многообразии $\breve{X}_m$ справедливо $\breve{D}^2\big|_\rho = 0$.

Над m-мерным деформирующимся многообразием $\breve{X}_m$ было построено главное расслоение реперов 2-го порядка $D_m^2(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями (см.: [6—9]):

$$\breve{D}\omega^i = \omega^j \wedge \breve{\omega}_j^i, \tag{1}$$

$$\breve{D}\breve{\omega}_j^i = \breve{\omega}_j^k \wedge \breve{\omega}_k^i + \omega^k \wedge \breve{\omega}_{jk}^i, \tag{2}$$

$$\breve{D}\breve{\omega}_{jk}^i = \breve{\omega}_{jk}^l \wedge \breve{\omega}_l^i - \breve{\omega}_{lk}^i \wedge \breve{\omega}_j^l - \breve{\omega}_{jl}^i \wedge \breve{\omega}_k^l + \omega^l \wedge \breve{\omega}_{jkl}^i,$$

где (см.: [6; 7])

$$\omega^i = x_j^i dx^j,$$

$$\breve{\omega}_j^i = -\overset{*}{x}{}_j^k dx_k^i - \breve{x}_{jk}^i \omega^k, \tag{3}$$

$$\breve{\omega}_{jk}^i = \breve{\Delta}\breve{x}_{jk}^i + (\breve{x}_{j[k}^s \breve{x}_{sl]}^i - \breve{x}_{jkl}^i)\omega^l.$$

Для слоевых координат 2-го порядка $\breve{x}_{jk}^i$ справедливо равенство

$$\breve{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i,$$

где $N_{jk}^i = \overset{*}{x}{}_{[j}^l \delta_{k]}^i \partial_l f = \overline{N}_{pq}^l \overset{*}{x}{}_j^p \overset{*}{x}{}_k^q$. Слоевые координаты 3-го порядка $\breve{x}_{jkl}^i$ симметричны только по последним двум индексам. Оператор $\breve{\Delta}$ действует по закону

$$\breve{\Delta}S_j^i = dS_j^i + S_j^l \breve{\omega}_k^i - S_k^i \breve{\omega}_j^k.$$

Замечание. Галочка показывает, что объекты получены в результате применения операторов $\breve{D}$ и $\breve{d}$.

Альтернирование форм $\breve{\omega}_{jk}^i$ имеет вид

$$\breve{\omega}_{[jk]}^i \equiv -\breve{\Delta}N_{jk}^i \ \left(mod\ \omega^k\right),$$

то есть при фиксации точки многообразия

$$\breve{\omega}_{[jk]}^i\Big|_{\omega^l=0} = \overset{*}{x}{}_{[j}^s \delta_{k]}^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^\xi \partial x^s} dx^\xi.$$

Кроме того, $\breve{\omega}_{j[kl]}^i \equiv \breve{x}_{js}^i \breve{\Delta}\mathrm{N}_{\mathrm{kl}}^{\mathrm{s}}\ (mod\ \omega^k)$.

2. Пфаффовы производные и скобки касательных векторов

Пусть $T\breve{X}_m = span(\varepsilon_i)$ и $T^*\breve{X}_m = span(\omega^i)$ — касательное и кокасательное пространства к многообразию $\breve{X}_m$ в его текущей точке, причем $\omega^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$. Для построенных дифференциалов справедливо

$$\breve{D}\omega^i = D\omega^i + N^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$\breve{d}\varepsilon_i = d\varepsilon_i + N^\xi_{ij}\omega^j \otimes \partial_\xi.$$

Касательное пространство 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$ деформирующегося многообразия $\breve{X}_m$ натянуто на векторы

$$\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j, \quad \breve{\varepsilon}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{ij}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi,$$

причем $\partial_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$,

$$\breve{\Delta}\varepsilon_i = \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j, \quad \breve{\Delta}\breve{\varepsilon}_{ij} - \breve{\omega}^k_{ij} \otimes \varepsilon_k = \omega^k \otimes \breve{\varepsilon}_{ijk}; \tag{4}$$

$$\breve{\varepsilon}_{[ij]} = -N^k_{ij}\varepsilon_k, \quad \breve{\varepsilon}_{(ij)} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j \partial_{lk} + \breve{x}^k_{(ij)}\varepsilon_k + \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\partial_\xi.$$

Рассмотрим касательный вектор $v = v^i\varepsilon_i$. С учетом (4) при отображении $\breve{d}$ получим

$$\breve{d}v = \varepsilon_i \otimes \breve{\Delta}\, v^i + v^i \breve{\varepsilon}_{ij} \otimes \omega^j.$$

Координаты v^i удовлетворяют уравнениям

$$\breve{\Delta}\, v^i = \breve{v}^i_j \omega^j, \tag{5}$$

где

$$\breve{\Delta}\, v^i = dv^i + v^j \breve{\omega}^i_j.$$

Уравнения и выражения для пфаффовых производных $\breve{v}^i_j$ можно найти двумя способами. Один способ состоит в том, чтобы в уравнениях (5) перейти к натуральному кореперу dx^i, dx^k_l, найти выражение для $\breve{v}^i_j$, продифференцировав которые получить уравнения для $\breve{v}^i_j$. Второй способ заключается во внешнем дифференцировании уравнений (5) с применением структурных уравнений (1, 2) и деривационных формул (4). Эти способы можно условно считать внутренним и внешним.

С учетом (3) из (5) получим выражение

$$\overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i \omega^j + \partial^l_k v^i dx^k_l + v^j \left(-\overset{*}{x}{}^l_j dx^k_l \delta^i_k - x^i_{jk}\omega^k\right) = \breve{v}^i_j \omega^j,$$

откуда следуют равенства коэффициентов при базисных формах ω^j и дифференциалах dx^k_l

$$\breve{v}^i_j = \overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i - v^k \breve{x}^i_{kj}, \tag{6}$$

$$\partial^l_k v^i = \delta^i_k v^j \overset{*}{x}{}^l_j.$$

Рассмотрим также производные, которые понадобятся далее:

$$\partial_s\left(\partial^l_k v^i\right) = \partial^l_{ks} v^i = \partial_{sk}^{\ \,l} v^i = \delta^i_k \overset{*}{x}{}^l_j \partial_s v^j. \tag{7}$$

Замечание. Поскольку $\breve{\omega}^i_j\big|_{\omega^k=0} = \omega^i_j\big|_{\omega^k=0} = -\overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k$, то при фиксации точки базы из (5) получим точно такие же уравнения для объекта v^i на многообразии $\breve{X}_m$, как и на обычном гладком многообразии X_m:

$$dv^i\big|_{\omega^k=0} = v^j \overset{*}{x}{}^k_j dx^i_k.$$

Эта система дифференциальных уравнений линейна и однородна относительно компонент объекта v^i и их дифференциалов. Значит, объект v^i на многообразии $\breve{X}_m$ не только по форме, но и по сути является тензором Г. Ф. Лаптева, то есть линейным однородным геометрическим объектом [1, с. 298].

Дифференцирование функций (6) дает

$$d\breve{v}^i_j = d\overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i + \overset{*}{x}{}^k_j d\left(\partial_k v^i\right) - dv^k \breve{x}^i_{kj} - v^k d\breve{x}^i_{kj} =$$

$$= \left(\overset{*}{x}{}^k_l \breve{\omega}^l_j + \overset{*}{x}{}^k_s \breve{x}^s_{jl}\omega^l\right)\partial_k v^i +$$

$$+ \overset{*}{x}{}^k_j \left(\partial_{ks} v^i \overset{*}{x}{}^k_l \omega^l + \underline{\partial^{\ l}_{ks} v^i dx^s_l}\right) - \left(\breve{v}^k_l \omega^l - v^l \breve{\omega}^k_l\right)\breve{x}^i_{kj} +$$

$$+ v^k\left(\breve{\omega}^i_{kj} + \breve{x}^l_{kj}\breve{\omega}^k_l - \breve{x}^i_{lj}\breve{\omega}^l_k - \breve{x}^i_{kl}\breve{\omega}^l_j + \left(\breve{x}^s_{k[j}\breve{x}^i_{sl]} - \breve{x}^i_{kjl}\right)\omega^l\right).$$

Учитывая (7) в подчеркнутом слагаемом последнего равенства, получим

$$d\breve{v}^i_j = -\breve{v}^k_j \breve{\omega}^i_k + \breve{v}^i_k \breve{\omega}^k_j + \breve{v}^k \breve{\omega}^i_{kj} + \tag{8}$$

$$+\left(\breve{v}^i_l \breve{x}^l_{jk} + v^s \breve{x}^i_{sl} \breve{x}^l_{jk} + \overset{*}{x}{}^l_j \overset{*}{x}{}^s_k \partial_{ls} v^i + \breve{v}^l_j \breve{x}^i_{lk} + \breve{v}^l_k \breve{x}^i_{lj} + v^s \breve{x}^l_{s(j} \breve{x}^i_{lk)}\right) \omega^k.$$

Тогда уравнения на пфаффовы производные $\breve{v}^i_j$ принимают следующий вид:

$$\breve{\Delta}\, \breve{v}^i_j - v^k \breve{\omega}^i_{kj} = \breve{v}^i_{jk} \omega^k,$$

откуда видно, что они образуют тензор вместе с координатами v^i. Компоненты $\breve{v}^i_{jk}$ пфаффовых производных имеют вид

$$\breve{v}^i_{jk} = \breve{v}^i_l \breve{x}^l_{jk} + v^s \breve{x}^i_{sl} \breve{x}^l_{jk} + \overset{*}{x}{}^l_j \overset{*}{x}{}^s_k \partial_{ls} v^i +$$

$$+\breve{v}^l_j \breve{x}^i_{lk} + \breve{v}^l_k \breve{x}^i_{lj} + v^s \breve{x}^l_{s(j} \breve{x}^i_{lk)},$$

причем их симметричные и кососимметричные части можно записать следующим образом:

$$\breve{v}^i_{[jk]} = \left(\breve{v}^i_l + v^s \breve{x}^i_{sl}\right) \breve{x}^l_{[jk]} = -(\breve{v}^i_l + v^s \breve{x}^i_{sl}) N^l_{jk},$$

$$\breve{v}^i_{(jk)} = \breve{v}^i_l \breve{x}^l_{(jk)} + v^s \breve{x}^i_{sl} \breve{x}^l_{(jk)} + \overset{*}{x}{}^l_j \overset{*}{x}{}^s_k \partial_{ls} v^i +$$

$$+\breve{v}^l_j \breve{x}^i_{lk} + \breve{v}^l_k \breve{x}^i_{lj} + v^s \breve{x}^l_{s(j} \breve{x}^i_{lk)}.$$

Теперь продифференцируем уравнения (5) внешним образом с помощью $\breve{D}$:

$$\left(\breve{\Delta}\, \breve{v}^i_j - v^k \breve{\omega}^i_{kj}\right) \wedge \omega^j + \breve{D}\left(dv^i\right) = 0.$$

Для использования леммы Лаптева необходимо условие $\breve{D}\left(dv^i\right) = \theta^i_j \wedge \omega^j$, тогда из соотношений

$$\left(\breve{\Delta}\, \breve{v}^i_j - v^k \breve{\omega}^i_{kj} + \theta^i_j\right) \wedge \omega^j = 0$$

получим

$$\breve{\Delta}\, \breve{v}^i_j - v^k \breve{\omega}^i_{kj} + \theta^i_j = \breve{v}^i_{(jk)} \omega^k\,.$$

Для совпадения этих уравнений с найденными другим способом уравнениями (8) необходимо условие $\theta_j^i = \breve{v}_{[jk]}^i \omega^k$, тогда

$$\breve{\Delta}\, \breve{v}_j^i - v^k \breve{v}_{kj}^i = \left(\breve{v}_{(jk)}^i + \breve{v}_{[jk]}^i\right)\omega^k.$$

Последнее равенство совпадает с (8), если

$$\breve{v}_{jk}^i = \breve{v}_{(jk)}^i + \breve{v}_{[jk]}^i.$$

Таким образом, внешний способ приводит к тому же результату, что и внутренний, если

$$\breve{D}\left(dv^i\right) = -\breve{v}_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k,$$

что на самом деле выполняется при прямом вычислении $\breve{D}\left(dv^i\right)$. Кстати, для полного дифференциала функции $g = g(x^i, x^\xi)$ справедливо аналогичное равенство

$$\breve{D}(dg) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \partial_k f \partial_l g \overset{*}{x}{}_{[i}^k \overset{*}{x}{}_{j]}^l \omega^i \wedge \omega^j \text{ [6]}.$$

Замечание. На обычном гладком многообразии $D\left(dv^i\right) = 0$, $\breve{x}_{(jk)}^l = x_{jk}^l$ и оба способа (как внутренний, так и внешний) дают одинаковый результат с симметричными пфаффовыми производными $v_{jk}^i = \breve{v}_{(jk)}^i$.

Скобка Ли касательных векторов $u = u^i \varepsilon_i$, $v = v^i \varepsilon_i$ на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ имеет вид

$$[u, v] = [u^i \varepsilon_i, v^j \varepsilon_j] = \left[u^j\left(\breve{v}_j^i + v^k \breve{x}_{kj}^i\right) - v^j\left(\breve{u}_j^i + u^k \breve{x}_{kj}^i\right)\right]\varepsilon_i.$$

Фактически с учетом обозначений (6) и $\breve{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i$ для скобки векторов на многообразии $\breve{X}_m$, так же как и на многообразии X_m, имеем

$$[u, v] = \left[u^j \overset{*}{x}{}_j^k \partial_k v^i - v^j \overset{*}{x}{}_j^k \partial_k u^i\right] \varepsilon_i.$$

3. Кручение аффинной связности и симметрия тензора деформации на многообразии $\breve{X}_m$

Аффинная связность в главном расслоении реперов $D^1_m(\breve{X}_m)$ со структурными уравнениями (1, 2) задается по Лаптеву с помощью форм [7; 10]:

$$\tilde{\breve{\omega}}^i_j = \breve{\omega}^i_j - \breve{\Gamma}^i_{jk}\omega^k \quad (\breve{\Delta}\,\breve{\Gamma}^i_{jk} + \breve{\omega}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{jk,l}\omega^l).$$

Объект кручения $\breve{T}^i_{jk} = \breve{\Gamma}^i_{[jk]}$ аффинной связности удовлетворяет сравнениям

$$\breve{\Delta}\,\breve{T}^i_{jk} \equiv \breve{\Delta}\,N^i_{jk}, \tag{9}$$

влекущим нетензорность объекта кручения, следствием чего является то, что аффинная связность на многообразии $\breve{X}_m$ всегда имеет кручение.

Рассмотрим разложение

$$\breve{\Gamma}^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - \breve{x}^i_{jk} \tag{10}$$

с использованием тензора деформации $\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk}\big(x^l, x^p_q\big)$ от канонической аффинной связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$ к произвольной.

Можно полагать (см.: [8]), что любой связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ с тензором γ^i_{jk}, определенной на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$, соответствует связность Γ^i_{jk} с тем же тензором γ^i_{jk}, определенная на обычном гладком многообразии X_m (и наоборот). Отметим, что в работе [8] говорилось о связности на многообразии при отнесении его к неголономным и голономным реперам.

Известно, что связность является полусимметрической (см.: [3; 4; 11; 12; 14]), если ее тензор кручения S^k_{ij} имеет вид (см.: [3, гл. IV, § 40])

$$S^k_{ij} = \tfrac{1}{m-1}(\delta^k_i\eta_j - \delta^k_j\eta_i),$$

где δ^k_i — символ Кронекера, а $\eta_j = S^i_{ij}$.

Утверждение. *Слоевые координаты* $\breve{x}^i_{jk}$ *на многообразии* $\breve{X}_m$ *являются полусимметрическими.*

Для слоевых координат 2-го порядка (это компоненты канонической связности) $\breve{x}^i_{jk}$ справедливо

$$\breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk},$$

где $N^i_{jk} = \overset{*}{x}{}^l_{[j}\delta^i_{k]}\partial_l f = \overline{N}^l_{pq}\overset{*}{x}{}^p_j\overset{*}{x}{}^q_k$ — это кручение канонической связности. Для свертки $N_k = N^i_{ik}$ имеем

$$N_k = \frac{1-m}{2}\overset{*}{x}{}^l_k\partial_l f,$$

поэтому

$$N^i_{jk} = \frac{1}{m-1}(\delta^i_j N_k - \delta^i_k N_j).$$

Следовательно, координаты $\breve{x}^i_{jk}$ являются полусимметрическими (см.: [3; 4; 11; 12; 14]).

Формы $\breve{\omega}^i_{jk}$, так же как и координаты $\breve{x}^i_{jk}$, являются полусимметрическими.

Альтернируя разложение (10) для связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$, получим разложение для компонент объекта кручения

$$\breve{\mathrm{T}}^k_{ij} = \gamma^k_{[ij]} + N^k_{ij}. \tag{11}$$

В случае симметричного тензора деформации γ^i_{jk} ($\gamma^k_{[ij]} = 0$) кручение выражается по формуле $\breve{\mathrm{T}}^k_{ij} = N^k_{ij}$.

Следует отметить, что на многообразии X_m симметричность тензора γ^i_{jk} влечет за собой симметричность связности Γ^i_{jk}, тогда как на многообразии $\breve{X}_m$ симметричность тензора γ^i_{jk} не влечет за собой симметричность связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$. Несимметрия связности $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ обусловлена в первую очередь несимметрией координат $\breve{x}^i_{jk}$. Даже если тензор γ^i_{jk} является симметричным, то связность $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ не является симметричной. Поскольку в этом случае $\breve{T}^i_{jk} = \breve{x}^i_{[jk]} = -N^i_{jk}$, то $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ будет полусимметричной.

Теорема 1. *Если тензор деформации γ^i_{jk} симметричен или равен нулю, то связность $\breve{\Gamma}^i_{jk}$ является полусимметрической.*

Рассмотрим оснащающие векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$:

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}^k_{ij}\varepsilon_k, \quad \breve{\Delta}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} \equiv 0 \pmod{\omega^k}.$$

Несимметричные векторы

$$\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j (\partial_{lk} + N^{\xi}_{lk}\partial_{\xi}) + \gamma^k_{ij}\varepsilon_k$$

заданы в касательном пространстве 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$, $\tilde{E} = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}) \subset T^2\breve{X}_m$, однако задают они аффинную связность 1-го порядка.

В [7] говорилось, что равенство $v^{ij}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = v^k\varepsilon_k$ равносильно системе

$$v^{ij}\overset{*}{x}{}^{(l}_i \overset{*}{x}{}^{k)}_j = 0, \;\; v^k = v^{ij}\gamma^k_{ij},$$

имеющей ненулевое решение

$$v^{ii} = 0, \;\; v^{ij} = -v^{ji}, \; i \neq j, \quad v^k = v^{ij}\gamma^k_{ij}.$$

Таким образом, подпространство $\tilde{E}$ пересекает касательную плоскость $T\breve{X}_m$, что не позволяет называть ее нормалью, даже обобщенной (см.: [8]). Следовательно, хотя выражение для альтернированных повторных ковариантных производных базисных касательных векторов имеет традиционный вид

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{j]}\varepsilon_i = \breve{\nabla}_{[k}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{|i|j]} = \breve{T}^l_{jk}\tilde{\breve{\varepsilon}}_{il} + \breve{R}^l_{ijk}\varepsilon_l \quad (\tilde{\breve{\varepsilon}}_{il} \neq \tilde{\breve{\varepsilon}}_{li}), \tag{12}$$

тем не менее объекты кручения $\breve{T}^l_{jk}$ и кривизны $\breve{R}^l_{ijk}$ произвольной связности нельзя трактовать как горизонтальную и вертикальную составляющие альтернированных повторных ковариантных производных касательных векторов.

Заметим, что равенства $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{[ij]} = \gamma^k_{[ij]}\varepsilon_k$ выполняются как на многообразии $\breve{X}_m$, так и на многообразии X_m. Таким образом, симметрия тензора деформации γ^k_{ij} отвечает за симметрию оснащающих векторов $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij}$. В этом случае $\tilde{E} \cap T\breve{X}_m = \emptyset$.

Если тензор деформации γ_{ij}^{k} симметричен, то касательное пространство 2-го порядка $T^2\breve{X}_m$ распадается в прямую сумму $T^2\breve{X}_m = T\breve{X}_m \oplus HT^2\breve{X}_m$ касательного пространства $T\breve{X}_m$ и оснащающего подпространства $span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$. В этом случае векторы $\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij} = \breve{\varepsilon}_{ij} + \breve{\Gamma}_{ij}^{k}\varepsilon_k$ являются (*обобщенными) горизонтальными векторами 2-го порядка для аффинной связности 1-го порядка*, подпространство $HT^2\breve{X}_m = span(\tilde{\breve{\varepsilon}}_{ij})$ пространства $T^2\breve{X}_m$ — *(обобщенным) горизонтальным пространством*, касательное пространство $T\breve{X}_m = VT^2\breve{X}_m$ — *вертикальным пространством в касательном пространстве 2-го порядка* $T^2\breve{X}_m$.

4. Кривизна, порожденная кручением и деформацией аффинной связности

Структурные уравнения для форм $\tilde{\breve{\omega}}_j^i$ имеют вид

$$\breve{D}\tilde{\breve{\omega}}_j^i = \tilde{\breve{\omega}}_j^k \wedge \tilde{\breve{\omega}}_k^i + \frac{1}{2}\breve{R}_{jkl}^{i}\omega^k \wedge \omega^l.$$

Компоненты объекта кривизны можно выразить с помощью компонент объекта связности и его пфаффовых производных $\breve{R}_{jkl}^{i} = \breve{\Gamma}_{j[k,l]}^{i} - \breve{\Gamma}_{j[k}^{s}\breve{\Gamma}_{|s|l]}^{i}$, а также с помощью тензора деформации [7]

$$\breve{R}_{jkl}^{i} = \partial_s\gamma_{j[k}^{i}\overset{*}{x}{}_{l]}^{s} - \gamma_{js}^{i}N_{kl}^{s} - \gamma_{j[k}^{s}\gamma_{|s|l]}^{i}, \tag{13}$$

причем

$$\breve{\Delta}\,\breve{R}_{jkl}^{i} \equiv -\gamma_{js}^{i}\breve{\Delta}N_{kl}^{s}. \tag{14}$$

Из сравнений (14) видно, что компоненты объекта кривизны образуют тензор только при $\breve{\gamma}_{jk}^{i} = 0$, то есть для канонической связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}_{jk}^{i}$, причем в этом случае $\overset{c}{\breve{R}}{}_{jkl}^{i} = 0$.

Учитывая сравнения (9, 14) и тензорность объекта деформации γ_{jk}^{i}, получим следующее выражение для объекта кривизны: $\breve{R}_{jkl}^{i} = -\gamma_{js}^{i}\breve{T}_{kl}^{s}$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Деформация* γ^i_{js} *и кручение* $\breve{T}^s_{kl}$ *аффинной связности индуцируют кривизну этой связности по формуле*

$$ {}^T\breve{R}^i_{jkl} = -\gamma^i_{js}\breve{T}^s_{kl}. \tag{15}$$

Дадим геометрическую характеристику этой связности с помощью альтернированных повторных ковариантных производных базисных касательных векторов (12).

Из (4_1) с учетом форм $\breve{\widetilde{\omega}}^i_j$ следует, что ковариантные производные тензора v^i имеют вид

$$\breve{\nabla}_j v^i = \breve{v}^i_j - v^k\breve{\Gamma}^i_{kj}.$$

Или, с использованием обозначения (6) и разложения (10),

$$\breve{\nabla}_j v^i = \overset{*}{x}{}^k_j \partial_k v^i - v^k\gamma^i_{kj}.$$

Для связности с кривизной (15) получим из (12)

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{\mathrm{j}]}\varepsilon_i = \breve{\nabla}_{[k}\breve{\tilde{\varepsilon}}_{|i|j]} = \breve{T}^l_{jk}(\breve{\tilde{\varepsilon}}_{il} - \gamma^s_{jl}\varepsilon_s)$$

или

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{\mathrm{j}]}\varepsilon_i = \breve{\nabla}_{[k}\breve{\tilde{\varepsilon}}_{|i|j]} = \breve{T}^l_{jk}\overset{*}{x}{}^p_i\overset{*}{x}{}^q_l(\partial_{pq} + N^\xi_{pq}\partial_\xi).$$

Симметричные векторы

$$\overset{\mathrm{c}}{\breve{\tilde{e}}}_{il} = \overset{*}{x}{}^p_i\overset{*}{x}{}^q_l(\partial_{pq} + N^\xi_{pq}\partial_\xi)$$

инвариантны и определяют горизонтальное подпространство $span\left(\overset{\mathrm{c}}{\breve{\tilde{e}}}_{ij}\right)$ канонической связности $\overset{c}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$. То есть подпространство $span\left(\overset{\mathrm{c}}{\breve{\tilde{e}}}_{ij}\right)$ симметричных векторов $\overset{\mathrm{c}}{\breve{\tilde{e}}}_{ij}$ не пересекает касательное пространство $T\breve{X}_m$ и дополняет его до всего $T^2\breve{X}_m$. При этом

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{\mathrm{j}]}\varepsilon_i = N^l_{jk}\overset{\mathrm{c}}{\breve{\tilde{e}}}_{il}.$$

Теорема 3. *Относительно связности, кривизна* ${}^{T}\breve{R}^{i}_{jkl} = -\breve{\gamma}^{i}_{js}\breve{T}^{s}_{kl}$ *которой порождена кручением и деформацией, альтернации повторных ковариантных производных векторов* ε_i *натянуты на симметричные векторы* $\overset{c}{\tilde{\breve{e}}}_{il} = \overset{*}{x}{}^{l}_{i}\overset{*}{x}{}^{k}_{j}(\partial_{lk} + N^{\xi}_{lk}\partial_{\xi})$, *определяющие нормаль* $\overset{c}{\tilde{E}}$, $\overset{c}{\tilde{E}} \oplus T\breve{X}_m = T^2\breve{X}_m$, *дополняющую касательное пространство* $T\breve{X}_m$ *до касательного пространства 2-го порядка* $T^2\breve{X}_m$.

5. Простая связность и ее свойства

Для векторов $u = u^i\varepsilon_i$, $v = v^i\varepsilon_i$, $w = w^i\varepsilon_i$ на деформирующемся многообразии $\breve{X}_m$ имеем

$$\nabla_u v - \nabla_v u - [u, v] = u^i v^i \gamma^{i}_{[jk]}\varepsilon_i = u^i v^i\big(\breve{T}^{i}_{jk} - N^{i}_{jk}\big)\varepsilon_i,$$

$$\breve{\nabla}_u\breve{\nabla}_v w - \breve{\nabla}_u\breve{\nabla}_v w - \breve{\nabla}_{[u,v]} w = w^j\big(\breve{R}^{i}_{jkl} + \breve{\gamma}^{i}_{js}N^{s}_{kl}\big)u^k v^l \varepsilon_i,$$

причем

$$\nabla_u v = u^j \breve{\nabla}_j v^i \varepsilon_i.$$

Рассмотрим связность на многообразии $\breve{X}_m$, соответствующую симметрической плоской связности на многообразии X_m.

Симметрическая плоская связность на многообразии X_m определяется соотношениями

$$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v],$$

$$\nabla_u \nabla_v w - \nabla_u \nabla_v w = \nabla_{[u,v]} w.$$

На многообразии $\breve{X}_m$ этой связности будет соответствовать связность, кручение и кривизна которой выражаются по формулам

$$ {}^{N}\breve{\mathrm{T}}^{k}_{ij} = N^{k}_{ij}, \tag{16}$$

$$ {}^{N}\breve{R}^{i}_{jkl} = -\gamma^{i}_{js}N^{s}_{kl}. \tag{17}$$

Определение. Связность, кручения и кривизна которой выражаются через симметричный тензор деформации по формулам (16, 17), назовем *простой* и обозначим ${}^N\breve{\Gamma}^i_{jk}$. Эта связность является *полусимметрической*.

Кручение (16) отвечает связности с симметричным тензором деформации γ^i_{jk}. В этом случае связность является полусимметрической, а горизонтальные векторы $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ симметричны:

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{(ij)} = \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j\right)\partial_{lk} + \left(\gamma^k_{(ij)}\right)\varepsilon_k + \left(\overset{*}{x}{}^l_i \overset{*}{x}{}^k_j N^\xi_{lk}\right)\partial_\xi.$$

Для симметрического тензора деформации из (12) следует

$$\breve{\nabla}_{[k}\breve{\nabla}_{j]}\varepsilon_i = {}^N\breve{T}^l_{jk}\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{il} + {}^N\breve{R}^l_{ijk}\varepsilon_l = N^l_{jk}\left(\tilde{\tilde{\varepsilon}}_{il} - \breve{\gamma}^s_{il}\varepsilon_s\right) =$$

$$= N^l_{jk}\overset{*}{x}{}^p_i \overset{*}{x}{}^q_l\left(\partial_{pq} + N^\xi_{pq}\partial_\xi\right) = N^l_{jk}\overset{c}{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}_{il}.$$

Теорема 4. *На многообразии $\check{X}_m$ для полусимметрической связности с кручением ${}^N\breve{T}^k_{ij} = N^k_{ij}$ (16) и кривизной ${}^N\breve{R}^i_{jkl} = -\gamma^i_{js}N^s_{kl}$ (17) имеем*

$$\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v], \;\; \nabla_u \nabla_v w - \nabla_u \nabla_v w = \nabla_{[u,v]} w.$$

Это аналог связности без кручения и кривизны, заданной на многообразии X_m.

Утверждение. *Если на многообразии $\check{X}_m$ тензор деформации симметричен, то есть $\gamma^i_{[jk]} = 0$, то $\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]$.*

Проанализируем дополнительно условие (17) с учетом (13). Из (13) следует, что тензор γ^i_{jk} удовлетворяет условию

$$\partial_s \gamma^i_{j[k}\overset{*}{x}{}^s_{l]} = \gamma^s_{j[k}\gamma^i_{|s|l]}.$$

В случае кручения и кривизны (16, 17) для альтернированных ковариантных производных тензора γ^i_{jk} справедливо

$$\breve{\nabla}_{[l}\gamma^i_{|j|k]} = -\overset{*}{x}{}^s_{[l}\partial_s\gamma^i_{|j|k]},$$

или, с помощью касательных векторов ε_l,

$$\breve{\nabla}_{[l}\gamma^i_{|j|k]} = -\partial_{\varepsilon_{[l}}\gamma^i_{|j|k]}.$$

Теорема 5. *Относительно простой связности* ${}^{N}\breve{\Gamma}^i_{jk}$ *альтернации ковариантных производных тензора деформации противоположны альтернациям производных тензора деформации по направлению векторов* ε_l*, то есть*

$$\breve{\nabla}_{[l}\gamma^i_{|j|k]} = -\varepsilon_{[l}\left(\gamma^i_{|j|k]}\right).$$

Условие $\gamma^i_{jk} = 0$ выделяет из простой связности ${}^{N}\breve{\Gamma}^i_{jk}$ каноническую связность $\overset{\text{c}}{\breve{\Gamma}}{}^i_{jk} = -\breve{x}^i_{jk}$, которая является плоской и полусимметрической и для которой также выполняется

$$\overset{\text{c}}{\breve{\nabla}}_u v - \overset{\text{c}}{\breve{\nabla}}_v u = [u,v], \quad \overset{\text{c}}{\breve{\nabla}}_u \overset{\text{c}}{\breve{\nabla}}_v w - \overset{\text{c}}{\breve{\nabla}}_u \overset{\text{c}}{\breve{\nabla}}_v w = \overset{\text{c}}{\breve{\nabla}}_{[u,v]} w.$$

Замечание. На многообразии $\breve{X}_m$ симметрическая деформация связности (генератор [8]) выделяет класс *полусимметрических* связностей ${}^{N}\breve{\Gamma}^i_{jk}$, близкий по свойствам симметрической связности Γ^i_{jk} многообразия X_m. В работе [8] отмечено, что при использовании неголономных реперов симметричные связности не выделяются; в этом случае любые связности (в том числе и связности без кручения) имеют несимметричные компоненты.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 139—189.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Паньженский В. И.* Движения в пространствах с кручением // Соврем. матем. и ее прилож. 2015. Т. 96. С. 18—33.

5. *Петрова Л. И.* Кососимметричные дифференциальные формы: Законы сохранения. Основы теории поля. М., 2006.

6. *Полякова К. В.* О расширении касательного пространства 2-го порядка гладкого многообразия // ДГМФ. 2022. Вып. 53. С. 111—117.

7. *Полякова К. В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. Вып. 54 (2). С. 29—44.

8. *Рыбников А.К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. № 1. С. 73—80.

9. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

10. *Belova O.O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.

11. *Friedman A., Schoaten J.A.* Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung // Math. Zeitschrift. 1924. Vol. 21. P. 211—223.

12. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection // Tensor N.S. 1975. Vol. 29. P. 249—254.

13. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations. Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory. Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10, №46. doi: https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

14. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

Для цитирования: *Полякова К.В.* Аналоги симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 78—95. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6.

MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-2-6

Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor

Submitted on May 21, 2024

The paper is devoted to affine connection in the frame bundle associated with a manifold which structure equations and derivation formulas are constructed using deformations of the exterior and ordinary differentials. Curvature and torsion objects of this connection are not tensors. A characteristic of a curvature which is a convolution of a deformation tensor and a torsion, is considered. Torsion-free connections are not distinguished on the introduced manifold, even in the case of symmetric deformation, a class of semi-symmetric connections is distinguished, which is an analogue of symmetric connection on an ordinary smooth manifold. It is proved that if the connection deformation tensor is symmetric or zero, then the connection is semi-symmetric. Analogues of torsion-free and curvature-free connections are constructed. The torsion and curvature of this connection are expressed in terms of the symmetric deformation tensor for the connection. Canonical connection is a special case of this connection, it is semi-symmetric and curvature-free.

Keywords: second order tangent space, differential perturbation, non-symmetrical second order frames and coframes, torsion and curvature objects, flat connection, semi-symmetrical connection

References

1. *Laptev, G. F.:* Fundamental infinitesimal structures of higher orders on a smooth manifold. Tr. Geom. Sem., 1, 139—189 (1966).

2. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

3. *Norden, A. P.:* Spaces of affine connection. Moscow (1976).

4. *Panzhenskij, V. I.:* Isometries of spaces with torsion. Journal of Mathematical Sciences, **217**:5, 540—556 (2016). https://doi.org/10.1007/s10958-016-2990-z.

5. *Petrova, L. I.:* Skew-symmetric differential forms: Conservation laws. Fundamentals of field theory. Moscow (2006).

6. *Polyakova, K. V.:* On some extension of the second order tangent space for a smooth manifold. DGMF, 53, 111—117 (2022).

7. *Polyakova, K. V.:* On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 54 (2), 29—44 (2023).

8. *Rybnikov, A. K.:* Second-order generalized affine connections. Izvestia Vuzov. Math., **27**:1, 84—93 (1983).

9. *Shevchenko, Yu. I.:* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).

10. *Belova, O. O.:* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planesю J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

11. *Friedman, A., Schoaten, J. A.:* Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung. Math. Zeitschrift, 21, 211—223 (1924).

12. *Golab, S.:* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection. Tensor N. S., 29, 249—254 (1975).

13. *Petrova, L.:* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations. Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory. Interpretation of the Einstein Equation. Axioms, **10**:46 (2021). https://doi.org/10.3390/axioms10020046.

14. *Yano, K.:* On semi-symmetric metric connection. Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées, 15, 1579—1586 (1970).

For citation: Polyakova, K. V. Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. DGMF, 55 (2), 78—95 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6.