УДК 514.763.8

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет
mihail.banaru@yahoo.com

Об основных результатах Н. В. Степанова в теории ОДУ

Выделены основные результаты выдающегося отечественного математика Н. В. Степанова в геометрической теории ОДУ.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, инвариант, связность.

1. В 2016 году довольно скромно отмечалось 90-летие со дня рождения отечественного геометра Николая Васильевича Степанова (1926—1991), профессора, доктора физико-математических наук. Научная карьера Н. В. Степанова была связана с механико-математическим факультетом МГУ им. М. В. Ломоносова, где он получил образование и защитил кандидатскую и докторскую диссертации. Н. В. Степанов работал в Великих Луках и Смоленске [1].

Практически вся научная деятельность Н. В. Степанова была связана с одним направлением — геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее полно его результаты представлены в двух обзорах [2; 3], которые чаще всего цитируются специалистами в данной области. Достижениям Н. В. Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений уделено значительное место в обзоре [4] выдающегося отечественного специалиста Л. Е. Евтушика. В упомянутом обзоре Л. Е. Евтушик подчеркивает, что важнейшим направлением приложения современного аппарата геометрических исследований стала геометрия дифференциальных уравнений. Толчок этому направлению исследований задан работами замечательного французского геометра Эли Картана (см., например, [5]). Фундаментальные результаты в геометрической теории дифференциальных уравнений были получены Г. Ф. Лаптевым, А. М. Васильевым, В. И. Близникасом, А. К. Рыбниковым, Н. В. Степановым и их учениками [4].

2. Основной целью (и задачей) исследований Н. В. Степанова было отыскание инвариантов произвольного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

порядка $n > 3$ относительно псевдогруппы g преобразований плоскости; все остальные задачи являлись либо средствами достижения основной цели (дифференциально-геометрический аппарат, теория связностей и т. п.), либо ее естественными следствиями и развитием (классификация обыкновенных дифференциальных уравнений, различные истолкования инвариантов и связей между ними).

Н. В. Степановым была построена система (в принципе — бесконечная) продолжений основного уравнения, которая изучалась с точки зрения введенных операций ковариантного дифференцирования. Из системы продолжений выделялись структуры алгебраического характера (вообще говоря, бесконечномерные) с набором операторов ковариантного дифференцирования — дифференциальные алгебры. Показывалось, что данные алгебры возможно рассматривать в целом. Были введены различные числовые характеристики элементов алгебр, важнейшие из которых допускают весьма широкие обобщения и играют значительную роль в исследованиях. Была доказана теорема об однородности всех формул теории по одной из введенных характеристик [2].

После проведенной (для всех порядков) адаптации репера Н. В. Степанов получил один из самых значительных своих результатов — уравнения структуры фундаментально-групповой связности, инвариантно присоединенной к обыкновенному дифференциальному уравнению. Фундаментальная группа этой связности была изучена для уравнения $y^{(n)} = 0$ и для линейных дифференциальных уравнений порядка n.

Н. В. Степанов провел детальное исследование коэффициентов продолжений основного уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

и тензора кручения-кривизны связности. Были изучены соотношения между ними, что привело к выделению так называемого основного объекта обыкновенного дифференциального уравнения. Доказана ныне хорошо известная теорема о возможности выражения всех коэффициентов в теории через компоненты основного объекта. Из этого утверждения, в свою очередь, была выведена другая фундаментальная теорема об эквивалентности внутренней геометрии (определяемой структурными уравнениями связности) и внешней геометрии (которая определяется системой продолжений основного уравнения) [3].

Компактным образом были введены понятия инвариантов (относительных и абсолютных) различных объектов, описывались их признаки и свойства. Был доказан ряд теорем, позволявших выделять и строить неограниченное количество инвариантов и инвариантных объектов. В итоге на основании этих результатов была построена инвариантная классификация обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в качестве критериев классификации были выбраны дифференциально-алгебраические характеристики, тангенциальные свойства (свойства касательных расслоений) и структурные свойства (то есть свойства присоединенной к уравнению связности). Подобная классификация обыкновенных дифференциальных уравнений, по мнению самого Н. В. Степанова, не могла претендовать на полноту и завершенность, но была проведена впервые и оказалась весьма содержательной. Классификационные методы также были оригинальными и нашли применение в других исследованиях, использующих аналогичный аппарат (например, при классификации связностей).

Значительная часть исследований Н. В. Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений проводилась так называемым бескоординатным инвариантным методом. Однако и при введении координат и некоторых вторичных параметров было получено множество замечательных результатов. Поскольку все коэффициенты в данной теории в принципе должны выражаться через координаты и вторичные параметры, то понятия упомянутых выше числовых характеристик легко обобщаются на координаты и координатные формулы, причем теорема об однородности остается справедливой. Н. В. Степанов выделил классы обыкновенных дифференциальных уравнений с правой частью, легко выражающейся через координаты и производные (например, в случае когда правая часть есть полином от старших производных с коэффициентами, которые являются функциями координат и младших производных). Н. В. Степанов отмечал, что при переходе к координатам сразу теряются многие преимущества бескоординатного метода, ибо сразу возникают рамки одной координатной карты. С другой стороны, исследование становится более конкретным, возникают достаточно узкие классы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых координатное описание может быть более целесообразным.

По аналогии с классической теорией групп Ли, Н. В. Степанов ввел в рассмотрение так называемые импримитивные обыкновенные дифференциальные уравнения (импримитивной называют и соответствующую присоединенную структуру). Им был получен совершенно общий, не зависящий от выбора координат, вид правой части импримитивных уравнений. Специально исследован случай, когда импримитивное обыкновенное дифференциальное уравнение допускает связность с нулевой кривизной (тогда правая часть приводится к виду, не зависящему от $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$). При наложении некоторых дополнительных условий получаются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Класс импримитивных обыкновенных дифференциальных уравнений допускает инвариантное присоединение поля направлений на плоскости. Подавляющее большинство имеющих практическое применение обыкновенных дифференциальных уравнений как раз обладает этим свойством. Для таких уравнений Н. В. Степанов исследовал возможности введения инвариантной координатизации, им найден общий вид импримитивных обыкновенных дифференциальных уравнений как в общих, так и в специальных координатах. Были введены в рассмотрение новые классы импримитивных обыкновенных дифференциальных уравнений, выявлены критерии эквивалентности импримитивных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Н. В. Степанов рассматривал и такую задачу: найти упорядоченную пару $\langle g, E \rangle$, такую, что каждый нетривиальный абсолютный инвариант (относительно g) уравнения E является первым интегралом того же уравнения E. Идея такого исследования, скорее всего, была высказана Э. Картаном, но вопрос о существовании таких пар, где E есть обыкновенное дифференциальное уравнение порядка ни ниже трех, решена именно Н. В. Степановым. Им были найдены такие пары. В ходе исследований в данном направлении были выделены специальные классы обыкновенных дифференциальных уравнений, а в ходе дальнейших дифференциально-геометрических построений возникли так называемые разрешимые структуры (аналоги разрешимых групп Ли), интегрирующие множители и их обобщения — множители Дарбу, а также другие объекты, имеющие самое прямое отношение к проблеме интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Н. В. Степанов считал основными следующие свои результаты [6]:

1) нахождение фундаментально-групповой картановой связности, инвариантно относительно псевдогруппы всех достаточно гладких точечных преобразований плоскости присоединяемой к произвольному обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $n \geq 3$;

2) выделение из систем продолжений основного уравнения специальных структур алгебраического характера с формальными операторами дифференцирования; присоединяемые к обыкновенному дифференциальному уравнению дифференциальные алгебры являются совершенно необходимой частью аппарата, применяемого для построения присоединенной связности;

3) подробное изучение инвариантов и инвариантных объектов обыкновенных дифференциальных уравнений, их структуры и взаимосвязи; доказательство теорем, позволяющих получать неограниченное количество инвариантов и инвариантных объектов, причем вычисление таких инвариантов и инвариантных объектов всегда может быть доведено до конца;

4) решение проблемы соотношения внешней и внутренней геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений (они оказались эквивалентными!);

5) построение на базе имеющихся инвариантов так называемой инвариантной классификации обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая классификация, являясь единой, может отражать различные свойства уравнений и присоединенных к ним структур: дифференциально-алгебраических характеристик, касательных расслоений, присоединенных связностей.

3. Обратим внимание на то, что практически все приведенные выше результаты Н. В. Степанова относятся к геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка. Однако свои исследования в этой области Николай Васильевич начал в 1957 году под руководством А. М. Васильева с изучением пары (не системы) двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Позже ученики Н. В. Степанова (И. Ф. Ковренко, В. А. Кондрашенков, В. И. Усачев, В. Л. Федоров, Г. А. Банару) получали результаты об уравнениях третьего, четвертого и пятого порядков.

Подчеркнем, что большинство своих результатов в области геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений

Н. В. Степанов получил с помощью метода внешних дифференциальных форм, разработанного Эли Картаном и усовершенствованного многими выдающимися отечественными математиками, среди которых был и сам Николай Васильевич Степанов.

Список литературы

1. *Банару Г.А.* К 90-летию со дня рождения Н.В. Степанова // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 7—10.

2. *Степанов Н.В.* Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ // Итоги науки и техники. Сер.: Проблемы геометрии. 1977. Т. 8. С. 47—66.

3. *Степанов Н.В.* Геометрия дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер.: Проблемы геометрии. 1981. Т. 12. С. 127—164.

4. *Евтушик Л.Е.* Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева — Васильева при Московском университете (1980—1992 гг.) // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2002. Т. 11. С. 24—81.

5. *Cartan E.* La geometria de las ecuaciones diferenciales de terces orden // Rev. Mat. Hisp. Amer. 1941. Vol. 1. P. 3—33.

6. *Степанов Н.В.* Дифференциально-геометрическая теория уравнения $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$: дис. … д-ра физ.-мат. наук. М., 1986.

G. Banaru

On N. V. Stepanov's main results in the ODE theory

The main results in geometrical theory of ODE obtained by N. V. Stepanov are presented.

Key words: ordinary differential equation, invariant, connection.