

К.Ф. Самохвалов
В ЗАЩИТУ ПРОГРАММЫ ГИЛЬБЕРТА

В статье дается обоснование, почему вторая теорема Гёделя никак не «наносит смертельного удара по программе Гильберта» поскольку основной контекст обеих теорем Гёделя о неполноте это неполнота достаточно сильных непротиворечивых формальных систем, а вовсе не вопрос об отсутствии финитных доказательств их непротиворечивости.

The article substantiates the failure of the second Godel's theorem to "deal a death blow to Hilbert's Program" by virtue of the fact that the main context of both Godel's theorems of incompleteness is incompleteness of quite strong inconsistent formal systems and not the issue of absence of finite proofs of their inconsistency.

Ключевые слова: теоремы Гёделя, непротиворечивость формальной арифметики, программа Гильберта.

Keywords: Godel's theorems, consistency of formal arithmetic, Hilbert's program.

После публикации в 1960 году работы С. Фефермана «Арифметизация метаматематики в общей постановке» (Feferman, 1960) интенсифицировалась философская полемика о том, как арифметизация метаматематики влияет на программу Гильберта. С общим содержанием и ходом этой полемики читатель может ознакомиться по превосходным обзорным статьям (Zach, 2003) и (Raatikainen, 2013). Однако, обзoreваемая при этом «драма идей» нуждается, по нашему мнению, в следующем комментарии.

Пусть S — первопорядковая формальная арифметика. Мы говорим, что арифметика S непротиворечива, если и только если существует какое-нибудь арифметическое высказывание X для которого не верно, что оно доказуемо в S . Символически,

$$\text{CON}(S) \Leftrightarrow \exists X (\text{не верно, что } \vdash_S X), \quad (\alpha)$$

где: $\text{CON}(S)$ — сокращение для « S непротиворечива», $\vdash_S \dots$ — сокращение для «в S доказуемо ...». В силу (α) ясно, что

для любой конкретной арифметической формулы P выполняется импликация

$$(\text{не верно, что } \vdash_S P) \Rightarrow \text{CON}(S). \quad (\beta)$$

При этом ясно и то, что импликации обратного вида, вообще говоря, не выполняются. Например, не выполняется импликация $\text{CON}(S) \Rightarrow (\text{не верно, что } \vdash_S 0 \approx 0)$. Ясно также, что вторая теорема Гёделя о неполноте позволяет эффективно найти определённый частный случай, в котором упомянутая обратная импликация верна. В самом деле, эта теорема говорит:

$$\text{CON}(S) \Leftrightarrow (\text{не верно, что } \vdash_S \text{Cons}), \quad (\gamma)$$

где Cons — канонический гёделевский консис.

Примем во внимание, что для убеждённого гильбертианца заслуживают доверия только те суждения, которые финитно доказуемы. Поэтому, если вторая теорема Гёделя вообще призвана иметь хоть какое-то для него значение, то нужно признать, что эквивалентность (γ) установлена финитно. Более того, с точки зрения гильбертианца, эта финитно установленная эквивалентность (γ) полностью исчерпывает содержание рассматриваемой теоремы. Стало быть, для гильбертианца все остальное, что обычно приписывают второй теореме Гёделя, — досужие разговоры. В том числе для него досужей является следующая привычная формулировка самой теоремы: если арифметика S непротиворечива, то арифметическое высказывание Cons , *выражающее в S непротиворечивость S* , недоказуемо в S . В этой формулировке словосочетание, выделенное курсивом, является излишним. Ибо, что бы оно ни означало, фактическое финитное доказательство теоремы от него не зависит. В финитном доказательстве Cons фигурирует просто как конкретная формальная формула в языке S , относительно которой важно знать только лишь одно: доказуема она в S или нет. Совсем неважно при этом, выражает она что-либо, или ничего не выражает, истинная она или ложная, понятная или нет и т.д.¹

¹ Межу прочим, когда обычно говорят, что формула Cons «выражает» в S непротиворечивость S , то можно спросить: «Что эта формула выра-

Заметим, что финитно установленная эквивалентность (γ) ничего не говорит о том, финитно доказуемо или нет неарифметическое метавысказывание $\text{CON}(S)$ или неарифметическое метавысказывание (не верно, что $\vdash_S \text{Cons}$). Поэтому вторая теорема Гёделя никак не «наносит смертельного удара по программе Гильберта».

Естественный контекст обеих теорем Гёделя о неполноте — это как раз неполнота достаточно сильных непротиворечивых формальных систем, а вовсе не вопрос об отсутствии финитных доказательств их непротиворечивости.

Печально, конечно, что финитное доказательство непротиворечивости арифметики до сих пор не было найдено. Однако следует помнить, что Гильберт описал понятие финитного доказательства несколько расплывчато и нигде не дал точного определения этому понятию, надеясь на умение непосредственно распознавать, *коль скоро некоторое рассуждение имеется налицо*, финитно, оно или нет².

Литература

- Feferman, S. (1960) 'Arithmetization of Metamathematics in a General Setting', *Fundamenta Mathematicae*, vol. 49, no. 1, pp. 35-92.
- Raatikainen, P. (2013) 'Gödel's Incompleteness Theorems', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, [Online], <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/gödel-incompleteness/> [10 May 2014].

жает при другом выборе гёделевской нумерации?». И тогда становится ясным, что на самом деле Cons «выражает» не свойство *самой* системы S , коим является непротиворечивость S , а некоторое свойство *упорядоченной пары* (g, S) , где g — гёделевская нумерация.

² Нетрудно предположить, что Гильберт, как и все вменяемые люди, прекрасно осознавал, что доверие, даже заслуженное, к чему бы то ни было — это всегда *опытный* психологический факт, заранее установить который можно только лишь в рамках какой-либо *эмпирической* гипотезы. Однако основывать математику на эмпирических гипотезах Гильберту, склонному к некоторой форме кантианства, конечно, претило. Естественно поэтому, что он описал понятие финитного доказательства именно так, как сказано.

Zach, R. (2003) 'Hilbert's Program', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, [Online],
<http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/hilbert-program/> [10 May 2014].

Об авторе

Климентий Фёдорович *Самохвалов* – доктор философских наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск,
kfsamochvalov@mail.ru.

About author

Prof. Dr. *Klimenty F. Samokhvalov*, Leading Research Fellow, Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, kfsamochvalov@mail.ru.