2. *Кириченко В. Ф.* Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. «Матем.» 1984. Т. 48, №4. С. 711—734.

3. *Дондукова Н. Н.* Контактно-геодезические преобразования структурных тензоров почти контактных многообразий // Деп. в ВИНИТИ. М., 2005.

N. Dondukova

Special contact 2-geodesic transformations of almost contact metric structures

A special form of contact 2-geodesic transformations of almost contact metric manifolds is introduced. The structural tensors of almost contact metric manifolds is investigated and the invariant of the special contact 2-geodesic transformation is finded.

УДК 514.76

А. И. Егоров
Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского

О некоторых свойствах максимально подвижного риманова пространства V_4

Рассматривается риманово пространство V_4 с группой движений G_8. В этом максимально подвижном пространстве находятся ковариантно постоянные тензорные поля.

Ключевые слова: группа движений, ковариантно постоянное векторное поле, риманово пространство.

В этой работе рассматриваются некоторые свойства одного риманова пространства V_4 нулевой сигнатуры с группой движений максимального порядка. Метрика такого пространства V_4 в некоторой локальной системе координат имеет следующий вид:

$$ds^2 = 2dx^1dx^3 + 2dx^2dx^4 + \left(x^4\right)^2\left(dx^3\right)^2. \tag{1}$$

Это риманово пространство V_4 впервые рассматривалось профессором И. П. Егоровым в его монографии [1].

Метрическое тензорное поле g_{ij} для риманова пространства V_4 (1) имеет вид

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x^{4^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \left(i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4\right),\ \det\left\|g_{ij}\right\| \neq 0 .$$

1. В римановом пространстве V_4 (1) сначала решается вопрос о существовании ковариантно постоянных независимых векторных полей $\vec{\xi}$. Система из шестнадцати уравнений в частных производных первого порядка, определяющая ковариантно постоянные векторные поля, имеет следующий вид:

$$\xi^i_{,j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{\sigma j}\xi^\sigma = 0, \tag{2}$$

где

$$\Gamma^1_{34} = \Gamma^1_{43} = -\Gamma^2_{33} = x^4, \tag{3}$$

остальные составляющие Γ^i_{jk} равны нулю. (Ввиду громоздкости записи уравнений систему (2) не выписываем.)

Условия интегрируемости рассматриваемой системы имеют вид

$$\xi^3 = 0;\ \ \xi^4 = 0\,.$$

Интегрируя эту систему уравнений, получим, что

$$\left\{\xi^1 = \alpha^1;\quad \xi^2 = \alpha^2;\ \ \xi^3 = 0;\ \ \xi^4 = 0\right\},$$

где $\left\{\alpha^1, \alpha^2\right\} \subset \boldsymbol{R}$, или

$$\vec{\xi} = \left\{\alpha^1;\, \alpha^2;\, 0;\, 0\right\}. \tag{4}$$

Найденное векторное поле $\vec{\xi}$ изотропное и оно содержит два независимых векторных поля

$$\underset{1}{\vec{\xi}} = \{1;\, 0;\, 0;\, 0\},\ \underset{2}{\vec{\xi}} = \{0;\, 1;\, 0;\, 0\}. \tag{5}$$

Следовательно, мы приходим к следующему выводу:

Теорема 1. *В максимально подвижном римановом пространстве V_4 (1) всегда существует точно два независимых ковариантно постоянных изотропных векторных поля (5).*

2. Рассмотрим далее некоторые свойства тензора кривизны R_{ijke} риманова пространства V_4 (1).

Составляющие объекта аффинной связности Γ^i_{jk} (3) могут быть также записаны в следующем виде:

$$\Gamma^i_{jk} = A^i D_{jk} + B^i C_{jk}\,,$$

где

$$A^i = \delta^i_1;\quad B^i = \delta^i_2;\quad D_{34} = x^4;\quad C_{33} = x^4,$$

остальные D_{jk}, C_{jk} равны нулю. Нетрудно убедиться, что составляющие тензора кривизны R_{ijke} риманова пространства V_4 (1) имеют структуру

$$R_{ijke} = \varepsilon \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ke}\,,\ \cdot\left(\varepsilon = \pm 1\right), \tag{6}$$

где

1) $\varepsilon_{ij,k}=0; \cdot \varepsilon_{ke}=-\varepsilon_{ek}$,

2) $\varepsilon_{ke}=A_k B_e - A_e B_k$ (простой бивектор),

3) $\varepsilon^2=0$ (нильпотентный бивектор, то есть $\varepsilon_{jp}\varepsilon_k^p=0$),

где

$$\varepsilon_{34}=-\varepsilon_{43}=-1, \quad A_3=-1, \quad B_4=1, \quad R_{3434}=1,$$

остальные $\varepsilon_{ij}=0; \quad A_i=0, \quad B_j=0, \quad R_{ijke}=0$.

Таким образом, имеет место следующий вывод.

Теорема 2. *Тензор кривизны R_{ijke} риманова пространства V_4 (1) необходимо имеет структуру (6).*

3. Выясним теперь, существуют ли в пространстве с метрикой (1) тензорные поля $a_{ij}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, чтобы ковариантная производная $a_{ij,k}$ равнялась нулю:

$$a_{ij,k}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma_{ik}^{\sigma}a_{\sigma j}-\Gamma_{jk}^{\sigma}a_{i\sigma}=0 .$$

При $i, j, k=1, 2, 3, 4$ получим систему из сорока дифференциальных уравнений в частных производных, в которой 10 неизвестных a_{ij}. Ввиду громоздкости записи уравнений систему не выписываем. Решение этой системы можно представить в виде матрицы

$$\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \left(x^4\right)^2\alpha_{24}+c_1 & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\{\alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}, C_1\}\subset R$, $\left(a_{ij}=a_{ji}\right)$.

Решение системы представляет собой семейство ковариантных тензорных полей, зависящих от произвольных постоянных $\alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}$.

Итак, доказали следующую теорему:

Теорема 3. *В пространстве с заданной метрикой существует целое семейство ковариантно-постоянных тензорных полей a_{ij}, ковариантная производная от которых равна нулю.*

Возникает вопрос: так как метрическое тензорное поле g_{ij} — ковариантно постоянное (то есть $g_{ij,k} = 0$), то можно ли полученное тензорное поле a_{ij} привести к метрическому? Оказывается, можно.

Чтобы проверить, совпадает ли метрическое тензорное поле (g_{ij}) с тензором (a_{ij}), решается алгебраическая система второй степени из 16 уравнений с 16 неизвестными. Рассмотрение ограничивается случаем, когда формулы перехода имеют вид

$$x^{i'} = C^i_j \cdot x^j + C^i \left(i, j = \overline{1,4}\right).$$

Найдена система координат, с помощью которой из (a_{ij}) можно получить метрическое тензорное поле (g_{ij}) (то есть $g_{ij}(x') = a_{i'j'}(x')$):

$$\left\|C^i_j\right\| = \begin{pmatrix} C^4_4 & 0 & \dfrac{-C_1 \cdot C^3_3}{2\alpha_{24}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C^4_4 \cdot \alpha_{24}} & \dfrac{-C^3_3 \cdot \alpha_{34}}{\alpha_{24}} & \dfrac{-C^4_4 \cdot \alpha_{44}}{2\alpha_{24}} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_{24}} \cdot C^4_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^4_4 \end{pmatrix},$$

где C^4_4 — любое, $C^3_3 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_{24}} \cdot C^4_4}$, $\left|C^i_j\right| \neq 0$.

4. Выясним теперь, существуют ли в пространстве V_4 с заданной метрикой два раза ковариантные тензорные поля $b_{ij}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, являющиеся ковариантно-постоянными относительно символов Кристофеля второго рода, причем $b_{ij} \neq b_{ji}$ (в общем случае), то есть тензорные поля не симметрические.

Итак, нужно найти такие тензорные поля $b_{ij}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)$, чтобы ковариантная производная от них равнялась нулю:

$$b_{ij,k} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^{\sigma}_{ik} b_{\sigma j} - \Gamma^{\sigma}_{jk} b_{i\sigma} = 0.$$

При $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ получим систему из шестидесяти четырех дифференциальных уравнений в частных производных с шестнадцатью неизвестными b_{ij}. Уравнения не выписываем, так как они очень громоздкие.

Решение данной системы аналогично решению предыдущей системы. Оно представляет собой семейство ковариантно-постоянных тензорных полей, зависящих от четырех произвольных постоянных. Данное решение можно записать в виде матрицы

$$\left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & 0 & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{24} & -\beta_{23} & \left(\left(\left(x^4\right)^2\right)/2\right)\left(\beta_{13} + \beta_{24}\right) + c_1 & \left(\left(x^4\right)^2\right)/2 \ \beta_{14} + c_2 \\ -\beta_{14} & \beta_{13} & -\left(\left(x^4\right)^2\right)/2 \ \beta_{14} + c_3 & \beta_{44} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\{\beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{23}, \beta_{24}, \beta_{44}, c_1, c_2, c_3\} \subset R$.

5. Докажем теперь, что рассматриваемое пространство V_4, определяемое метрикой (1), является эйнштейновым и симметрическим пространством.

Для этого находим тензор Риччи по формуле $R_{ij} = R^{\sigma}_{ij\sigma}$. Получим, что $R_{ij} = 0$, то есть риманово пространство V_4 эйнштейново, так как $R_{ij} = æ\, g_{ij}$, где æ = 0.

Применяя ковариантное дифференцирование к тензору кривизны Римана первого рода, получим

$$R_{ijke,\delta} = \frac{\partial R_{ijkl}}{\partial x^{\delta}} - R_{\sigma jke}\Gamma^{\sigma}_{i\delta} - R_{i\sigma kl}\Gamma^{\sigma}_{j\delta} - R_{ij\sigma l}\Gamma^{\sigma}_{k\delta} - R_{ijk\sigma}\Gamma^{\sigma}_{l\delta} = 0.$$

В этой формуле 1024 равенств и все они нулевые, то есть пространство с заданной метрикой симметрическое.

Замечание 1. Составляющие тензорного поля b_{jk} (8) можно принять за составляющие нового метрического тензорного поля обобщенного риманова пространства $\widetilde{V}_4$ с кручением $\Omega \neq 0$:

$$\Omega_{jk} = \frac{1}{2}\left[b_{jk} - b_{kj}\right],$$

$$\left(\Omega_{jk}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_2 & \beta_{14} \\ 0 & 0 & \beta_{23} & -\delta_2 \\ -\delta_2 & -\beta_{23} & 0 & \frac{x^{4^2}}{2}\beta_{14} + \delta_3 \\ -\beta_{14} & \delta_2 & \frac{-x^{4^2}}{2}\beta_{14} - \delta_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где

$$\delta_1 = \frac{\beta_{13} + \beta_{24}}{2};\ \delta_2 = \frac{\beta_{13} - \beta_{24}}{2};\ \delta_3 = \frac{C_2 - C_3}{2};\ \delta_4 = \frac{C_2 + C_3}{2}.$$

Обобщенное риманово пространство $\widetilde{V}_4$ с кручением допускает полную группу движений G_r максимального порядка $r = 8$. Очевидно, что в нашем случае

$$\left(g_{jk}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\ \delta_1 & 0 & x^{4^2}\delta_1+C_1 & \delta_4 \\ 0 & \delta_1 & \delta_4 & \beta_{44} \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где $\delta_1=\dfrac{\beta_{13}+\beta_{24}}{2}$, $\delta_4=\dfrac{C_2+C_3}{2}$, $g_{jk}=\dfrac{1}{2}\left(b_{jk}+b_{kj}\right)$,

$\Omega_{jk}=\dfrac{1}{2}\left(b_{jk}-b_{kj}\right)$, $b_{jk}=g_{jk}+\Omega_{jk}$, $b_{jk}=g_{jk}+\Omega_{jk}$.

Составляющие $\{g_{jk}(x)\}$ образуют сопутствующее метрическое тензорное поле в пространстве $\tilde{V}_4$.

Замечание 2. Рассматриваемое в работе риманово пространство V_4 (1) можно обобщить на n-мерный случай следующим образом $(n>4)$:

$$ds^2=2dx^1dx^3+2dx^2dx^4+\left(x^{4^2}\right)dx^{3^2}+e_5dx^{5^2}+e_6dx^{6^2}+\ldots+e_ndx^{n^2}, \quad (11)$$

$$\left(e_\alpha=\pm1\right),\ \left(\alpha=5,6,\ldots,n\right).$$

Риманово пространство V_n (11) допускает полную группу гомотетических движений G_r порядка

$$r=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+6,\quad n\geq 4.$$

(Если $n=4$, то $r=9$.)

Замечание 3. За счет выбора новой системы координат в формулах (10) постоянную δ_1 можно обратить в 1, а постоянные δ_4,β_{44},C_1 — в нуль, а следовательно, тензорное поле g_{ij} приводится к виду (1).

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности. Казань, 1965.

A. Egorov

About properties of maximum mobility of Riemannian space V_4

This article describes the Riemannian space with a group of motions G_8. Covariantly constant tensor fields are found in this maximally mobile space.

УДК 513.7

Б.В. Заятуев
Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

О келеровой структуре на четырехмерном касательном расслоении

Показан способ построения одной келеровой структуры на касательном расслоении над двумерным ориентируемым римановым многообразием, имеющим знакоопределенную гауссову кривизну. Используется инвариантное исчисление Кошуля и понятия вертикального и горизонтального лифтов [1].

Ключевые слова: гауссова кривизна, касательное расслоение, келерова структура, горизонтальный и вертикальный лифты.