УДК 514.76

Г. А. Банару
Смоленский государственный университет, Россия
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-1

О квазисасакиевой структуре на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли

Доказано, что квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав является сасакиевой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, квазисасакиева структура, сасакиева структура, вполне омбилическая гиперповерхность, 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли

1. В 60-х годах XX века знаменитый американский геометр Альфред Грей задал особое направление в области эрмитовой геометрии 6-мерных многообразий. Грей установил [1], что так называемые 3-векторные произведения в алгебре Кэли порождают на ее 6-мерных подмногообразиях почти эрмитову структуру. Спустя десятилетие к изучению таких почти эрмитовых структур приступил выдающийся отечественный геометр Вадим Федорович Кириченко, а затем и его ученики. Один из самых значительных результатов, полученных В. Ф. Кириченко в данной области, — это полная классификация 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав [2].

Поступила в редакцию 26.06.2022 г.

В работе [3] В. Ф. Кириченко и М. Б. Банару ввели понятие уплощающегося эрмитова подмногообразия алгебры Кэли. Оказалось, что к числу уплощающихся относятся и все 6-мерные келеровы подмногообразия алгебры октав. При этом важно отметить, что известны примеры 6-мерных уплощающихся подмногообразий алгебры Кэли с эрмитовой структурой, отличной от келеровой [3; 4].

В данной заметке мы рассматриваем почти контактную метрическую структуру на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав. Получен такой результат:

Теорема. *Квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры Кэли является сасакиевой.*

Таким образом, 6-мерные эрмитовы уплощающиеся подмногообразия алгебры Кэли обладают свойством, присущим 6-мерным келеровым подмногообразиям алгебры октав [5]. Сходство (и даже совпадение) разнообразных свойств 6-мерных эрмитовых уплощающихся и 6-мерных келеровых подмногообразий алгебры октав было отмечено и в других работах (см., например, [6—9]).

2. Известно, что почти контактная метрическая (almost contact metric, acm-) структура индуцируется на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий исследовались и исследуются многими геометрами.

Напомним, что acm-структурой на многообразии N нечетной размерности называется система тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для которой выполняются такие условия [10]:

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$

$$\langle \Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Самым известным примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура [10], которая характеризуется следующими тождествами:

$$\nabla\eta=0, \quad \nabla\Phi=0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g. Известно, что многообразие с косимплектической структурой локально эквивалентно произведению некоторого келерова многообразия и вещественной прямой [10].

Напомним определение другого важнейшего вида почти контактной метрической структуры: структура (Φ,ξ,η,g) называется квазисасакиевой, если ее фундаментальная форма $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ замкнута и выполняется условие

$$N_{\Phi}+\frac{1}{2}d\eta\otimes\xi=0,$$

где N_{Φ} — тензор Нейенхейса оператора Φ.

Самой значительной работой в области геометрии квазисасакиевых структур является, по нашему мнению, статья В.Ф. Кириченко и А.Р. Рустанова [11].

3. Приведем краткое доказательство теоремы. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав [6; 7]:

$$\begin{aligned}
d\omega^{\alpha} &= \omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+i\sigma^{\alpha}_{\beta}\omega^{\beta}\wedge\omega+i\sigma^{\alpha\beta}\omega_{\beta}\wedge\omega;\\
d\omega_{\alpha} &= -\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}-i\sigma^{\beta}_{\alpha}\omega_{\beta}\wedge\omega-i\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\beta}\wedge\omega; \qquad (1)\\
d\omega &= -i\sigma^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{\beta}\wedge\omega_{\alpha}+i\sigma_{3\beta}\omega\wedge\omega^{\beta}-i\sigma^{\beta}_{3}\omega\wedge\omega_{\beta}.
\end{aligned}$$

Здесь через $\{\omega^{\alpha}\}$, $\{\omega_{\alpha}\}$ обозначены компоненты форм смещения $(\omega^3 = \omega)$; через $\{\omega_j^k\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_{\alpha} = \omega^{\hat{a}}$; $\alpha,\ \beta, \gamma = 1, 2$; $a,\ b, c = 1, 2, 3$; $\hat{a} = a + 3$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N в 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли.

Сопоставим эти уравнения со структурными уравнениями квазисасакиевой структуры [5; 10]:

$$d\omega^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} + B_{\beta}^{\alpha}\omega^{\beta} \wedge \omega;$$

$$d\omega_{\alpha} = -\omega_{\alpha}^{\beta} \wedge \omega_{\beta} - B_{\alpha}^{\beta}\omega_{\beta} \wedge \omega;$$

$$d\omega = 2B_{\beta}^{\alpha}\,\omega^{\beta} \wedge \omega_{\alpha}.$$

Следовательно,

$$1)\ \sigma_{\alpha\beta} = 0;\ 2)\ \sigma^{\alpha\beta} = 0;\ 3)\ \sigma_3^{\beta} = 0;\ 4)\ \sigma_{3\beta} = 0.$$

Это означает, что матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности N в 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли выглядит так:

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\sigma_{\alpha\hat{\beta}}}} \\ & & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{\sigma_{\hat{\alpha}\beta}}} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ & & 0 & & \end{array}\right), \quad p, s = 1, \ldots, 5.$$

Пусть гиперповерхность 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав является вполне омбилической: $\sigma_{ps} = \lambda g_{ps}, \lambda - const$. Принимая во внимание вид матрицы метрического тензора:

$$
\left(g_{ps}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c}
\mathbf{0} & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & I_2 \\
\hline
0\dots0 & 1 & 0\dots0 \\
\hline
I_2 & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & \mathbf{0}
\end{array}\right),
$$

мы приходим к выводу о том, что «блоки» $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ и $(\sigma_{\alpha\hat{\beta}})$ матрицы второй квадратичной формы погружения вполне омбилической гиперповерхности N в 6-мерное эрмитово уплощающееся подмногообразие алгебры Кэли имеют соответственно следующий вид: $\sigma_{\hat{\alpha}\beta}=i\,\delta^{\alpha}_{\beta}$, $\sigma_{\alpha\hat{\beta}}=-i\,\delta^{\beta}_{\alpha}$. Поэтому структурные уравнения (1) можно в данном случае переписать так:

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}-i\omega\wedge\omega^{\alpha};$$

$$d\omega_{\alpha}=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}+i\omega\wedge\omega_{\alpha};$$

$$d\omega=-2i\omega^{\alpha}\wedge\omega_{\alpha}.$$

Хорошо известно [5; 11], что полученные структурные уравнения задают сасакиеву структуру. Это означает, что квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности 6-мерного эрмитова уплощающегося подмногообразия алгебры октав является сасакиевой, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 141. P. 465—504.

2. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Математика. 1980. №8. С. 32—38.

3. *Банару М.Б., Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Успехи математических наук. 1994. №1. С. 205—206.

4. *Banaru M.B.* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // J. Math. Sci. (New York). 2015. Vol. 207, №3. P. 354—388.

5. *Степанова Л.В., Банару Г.А. Банару М.Б.* О геометрии QS-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 815—822.

6. *Banaru M.B., Banaru G.A.* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2014. №1 (74). P. 23—32.

7. *Banaru M.B., Banaru G.A.* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian // SUT J. Math. 2015. Vol. 51, №1. P. 1—9.

8. *Банару М.Б. Банару Г.А.* Об уплощающихся 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2017. Вып. 48. С. 21—25.

9. *Банару М.Б. Банару Г.А.* Об устойчивости эрмитовых структур на 6-мерных уплощающихся подмногообразиях алгебры Кэли // ДГМФ. Калининград, 2021. Вып. 52. С. 23—29.

10. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

11. *Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р.* Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Матем. сб. 2002. Т. 193, №8. С. 71—100.

MSC 2010: 53B35, 53B50

G.A. Banaru
Smolensk State University
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-1

On quasi-Sasakian structure on a totally umbilical hypersurface of a six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra

Submitted on June 26, 2022

Six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra equipped with almost Hermitian structures induced by Brown — Gray three-fold vector cross products in R^8 are considered.

We select the case when the almost Hermitian structures on such six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra are Hermitian, i.e. these structures are integrable. We study almost contact metric structures on totally umbilical hypersurfaces in such six-dimensional Hermitian planar submanifolds of the octave algebra.

We prove that if these almost contact metric structures on a totally umbilical hypersurface of a six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra are quasi-Sasakian, then they are Sasakian.

Keywords: almost contact metric structure, quasi-Sasakian structure, Sasakian structure, totally umbilical hypersurface, six-dimensional Hermitian planar submanifold of Cayley algebra

References

1. *Gray, A.:* Vector cross products on manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 141, 465—504 (1969).

2. *Kirichenko, V.F.:* Classification of Kählerian structures, defined by means of three-fold vector cross products on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Izvestia Vuzov. Math., 8, 32—38 (1980).

3. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* The Hermitian geometry of the 6-dimensional submanifolds of Cayley algebra. Russian Mathematical Surveys, **49**:1, 223—225 (1994).

4. *Banaru, M.B.:* Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra. J. Math. Sci. (New York). **207**:3, 354—388 (2015).

5. *Stepanova, L.V., Banaru, G.A., Banaru, M.B.:* On geometry of *QS*-hypersurfaces of Kählerian manifolds. Siberian Electronic Mathematical Reports, 15, 815—822 (2018).

6. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. Bul. Acad. Ştiinţe a Repub. Moldova. Mat., **1**:74, 23—32 (2014).

7. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* 1-cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian. SUT J. Math., **51**:1, 1—9 (2015).

8. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On planar 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF. Kaliningrad. 48, 21—25 (2017).

9. *Banaru, M.B., Banaru, G.A.:* On stability of Hermitian structures on 6-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra. DGMF. Kaliningrad. 52, 23—29 (2021).

10. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

11. *Kirichenko, V.F., Rustanov, A.R.:* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds. Sb. Math., **193**:8, 1173—1202 (2002).