$$d\Lambda^k_{ij} = \Lambda^k_{ijt}\,\omega^t,$$

где

$$\Lambda^k_{ijt} = \Lambda^k_{ijt} + \Lambda^k_{i\ell}\Lambda^\ell_{jt} + \Lambda^k_{\ell j}\Lambda^\ell_{it}. \qquad (4)$$

Дифференцируем равенство $\vec{F}^2_3 = \vec{x} - \frac{1}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_3$ и применяем обозначение (4) для $i=3$, $j = k = 2$. Тогда имеем $d\vec{F}^2_3 = \omega^i\vec{a}_3$, где

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i + \frac{\Lambda^2_{32i}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda^k_{3i}}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_k. \qquad (5)$$

В общем случае векторы $\vec{a}_i$ линейно независимы. Область $\widetilde{\Omega}$ отнесем к подвижному реперу $\widetilde{\mathcal{R}} = (F^2_3, \vec{a}_i)$. При таком выборе реперов $\mathcal{R}$, $\widetilde{\mathcal{R}}$ дифференциальные уравнения отображения f имеют вид: $\omega^i = \widetilde{\omega}^i$.

Линии ℓ, $\widetilde{\ell} = f(\ell)$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках x и $f(x) = y$, пересекаются либо параллельны [1].

Линия ℓ называется двойной линией пары (f, Δ_2), где Δ_2 -двумерное распределение в области Ω, если она является двойной линией отображения f и принадлежит распределению Δ_2 [1].

Пусть линия ω^1 плоская, т.е. $\Lambda^3_{21} = 0$. Легко видеть, что векторы $\vec{e}_1, \vec{a}_1$, $\vec{xF^2_3}$ компланарны, где $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + (\Lambda^2_{32})^{-2}\Lambda^2_{321}\vec{e}_3 - (\Lambda^2_{32})^{-1}\Lambda^2_{31}\vec{e}_2$. Следовательно, линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2). Обратно, пусть линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2). Тогда векторы $\vec{e}_1$, $\vec{a}_1$, $\vec{xF^2_3}$ должны быть компланарными. Из условия компланарности этих векторов получим, что $\Lambda^3_{21} = 0$, т.е. линия ω^1 плоская. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Линия ω^1 заданного семейства является двойной линией пары (f, Δ_2) (где $\Delta_2 = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$) тогда и только тогда, когда она плоская.

Аналогично можно доказать, что линия ω^2 является двойной линией пары (f, Δ_2) тогда и только тогда, когда векторы $\vec{\Lambda}_{12}$, $\vec{e}_2$ коллинеарны ($\vec{\Lambda}_{12}$ -вектор вынужденной кривизны поля вектора $\vec{e}_1$ вдоль направления $\vec{e}_2$).

Т е о р е м а 2. Сеть Σ_F является голономной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) линия ω^1 заданного семейства плоская; 2) векторы $\vec{\Lambda}_{12}$, $\vec{e}_2$ коллинеарны; 3) векторы $\vec{\Lambda}_{13}$, $\vec{e}_3$ коллинеарны [2].

С л е д с т в и е. Если сеть Σ_F голономна, то ее линии ω^1, ω^2 являются двойными линиями пары (f, Δ_2).

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую распределению Δ_2. Ее касательный вектор в точке x имеет вид: $\vec{\ell} = \ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2 \in \Delta_2(x)$. Тогда $\vec{\widetilde{\ell}} = \ell^i\vec{a}_i$ -касательный вектор линии $\widetilde{\ell} = f(\ell)$. Учитывая (5):

$$\vec{\widetilde{\ell}} = (\ell^1 - \frac{\Lambda^1_{32}}{\Lambda^2_{32}}\ell^2)\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^2_{31}\ell^1}{\Lambda^2_{32}}\vec{e}_2 + \frac{\Lambda^2_{321}\ell^1 + \Lambda^2_{322}\ell^2}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec{e}_3.$$

Из условия компланарности векторов $\vec{\ell}$, $\vec{\widetilde{\ell}}$, $\vec{xF^2_3}$ получим:

$$\Lambda^1_{32}t^2 - \Lambda^2_{32}t - \Lambda^2_{31} = 0, \qquad (6)$$

где $t = \ell^2 : \ell^1$. В общем случае квадратное уравнение имеет два решения. Следовательно, пара (f, Δ_2) имеет не более двух двойных линий. Поэтому, если линии ω^1, ω^2 являются двойными линиями пары (f, Δ_2) одновременно, то никакая другая линия, принадлежащая распределению Δ_2, не может быть двойной линией пары (f, Δ_2). Пусть только линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2), т.е. $\Lambda^3_{21} = 0$. Тогда уравнение (6) имеет решения $t = 0$, $t = \Lambda^2_{32}/\Lambda^1_{32}$. Решение $t = 0$ определяет направление, определяемое вектором $\vec{e}_1$, а решение $t = \Lambda^2_{32}/\Lambda^1_{32}$ определяет направление, определяемое вектором $\vec{\Lambda}_{32} = \Lambda^1_{32}\vec{e}_1 + \Lambda^2_{32}\vec{e}_2$ вынужденной кривизны поля вектора $\vec{e}_3$ вдоль направления $\vec{e}_2$. Таким образом, если линия ω^1 является двойной линией пары (f, Δ_2), то другой двойной линией этой пары является интегральная линия поля вектора $\vec{\Lambda}_{32}$.

Аналогично можно показать, что если линия ω^2 является двойной линией пары (f, Δ_2), то другой двойной линией этой пары является интегральная линия поля вектора $\vec{\ell} = \Lambda^2_{32}\vec{e}_1 + \Lambda^3_{21}\vec{e}_2$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып. 6. С. 19-25.

2. М а т и е в а Г. Об одной сети Френе//Тез. докл. IX Всесоюз. геометр. конф. Кишинев, 1988. С. 209.

УДК 514.76

РЕДУКЦИЯ СИЛЬНО ПРИВОДИМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА К СТРУКТУРЕ СТАБИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

И.Д. М е б о н и я

(Тбилисский государственный университет)

Как было замечено в [2], [4], один широкий класс нелинейных связностей в расслоениях реперов высших порядков естественным образом проектируется на множество всевозможных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на единицу большего порядка. Порождаемая связностью дифференциальная система берет на себя определенную геометрическую функцию, подобную той, которую выполняют уравнения геодезических линий пространства аффинной или римановой связности. Каждая дифференциальная система является при этом проекцией весьма обширного множества связностей. В рамках этого класса связностей, именуемых стабильными, ставится задача (а в данной работе и решается на примере систем пятого порядка) построения в некотором смысле единственной канонической нелинейной связности, проектируемой в заранее заданную дифференциальную систему приводимого (в нашем случае сильно приводимого) типа. Таким путем удается все инвариантные свойства дифференциальной системы получать и формулировать на геометрическом языке нелинейных связностей.

Объем данной статьи не дает возможности изложить все те факты и методы, которые необходимы для полного понимания приводимых утверждений и доказательств. Попутно с изложением основных результатов мы лишь приведем несколько существенно используемых формул и критерий. Для ознакомления с общим аппаратом нелинейных связностей применительно к расслоениям реперов мы отсылаем читателя к работам [3], [4]. Нами полностью сохранены обозначения, принятые в указанных статьях.

Исходным объектом является сильно приводимая дифференциальная система пятого порядка

$$f^5 : T^4(V_n) \to T^5(V_n), \quad \overline{V}_5^i = \overline{V}_5^i(\tau^5, V_1^e, V_2^e, V_3^e, V_4^e), \tag{1}$$

структурные уравнения которой имеют вид

$$\Delta V_5^i = V_{5k}^{i0}\omega^k + V_{5k}^{i1}\Delta V_1^k + V_{5k}^{i2}\Delta V_2^k + V_{5k}^{i3}\Delta V_3^k + V_{5k}^{i4}\Delta V_4^k, \tag{2}$$

где

$$\Delta V_q^i = dV_q^i + q!\sum_{s=1}^{q}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=q}\frac{1}{\alpha_1!}V_{\alpha_1}^{k_1}\cdots\frac{1}{\alpha_s!}V_{\alpha_s}^{k_s}\,\omega^i_{k_1\ldots k_s} \quad (q=\overline{1,5}) \tag{3}$$

суть структурные формы расслоения. Структурные уравнения всех индуцированных отображений выводятся путем продолжения уравнений (2) и операций охвата. Запишем условия сильной приводимости системы

$$V_{\lambda+1}^i \equiv \Gamma^i_{\lambda k}V_1^k \ (\lambda=\overline{1,4}), \quad \overline{V}_5^i \equiv \Gamma^i_{4k}V_1^k, \tag{4}$$

где величины

$$\Gamma^i_{\lambda+1,k} = \sum_{\mu=1}^{\lambda+1} C^{4-\lambda}_{3+\mu-\lambda} : C^{4-\lambda}_5 \cdot V^{i,3+\mu-\lambda}_{5e}\,\Gamma^e_{\mu-1,k}, \quad \Gamma^e_{0k} = \delta^e_k \tag{5}$$

являются компонентами оператора базисной производной, который существенно упрощает использование аппарата структурных уравнений. Этот оператор введен Л.Е.Евтушиком в [1]. Нашей задачей является построение нелинейной связности $\gamma^4 : T^4(V_n) \to J^4(V_n, T(V_n))$ четвертого порядка стабильного типа, проектирующейся в исходную систему f^5 как систему

своих автополярных линий. Это значит, что компоненты $\Gamma^i_k, \Gamma^i_{ks}, \Gamma^i_{kes}, \Gamma^i_{kejs}$ объекта перенесения связности γ^4 должны быть охвачены продолженным объектом системы, подчиняясь уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{k_1\ldots k_q} = d\Gamma^i_{k_1\ldots k_q} + \sum_{s=1}^{q}\Gamma^m_{\{k_1\ldots k_s}\omega^i_{k_{s+1}\ldots k_q\}m} - \sum_{s=0}^{q-1}\Gamma^i_{m\{k_1\ldots k_s}\omega^m_{k_{s+1}\ldots k_q\}} + V_1^k\,\omega^i_{k_1\ldots k_q k} = \Gamma^{i\,\varrho}_{k_1\ldots k_q\delta}\,\Delta V^\delta_\varrho \quad (q=\overline{1,4}), \tag{6}$$

а также условиям стабильности

$$\nabla V_q^i = V^i_{q+1} - q!\sum_{s=1}^{q}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=q}\frac{1}{\alpha_1!}V^{k_1}_{\alpha_1}\cdots\frac{1}{\alpha_s!}V^{k_s}_{\alpha_s}\Gamma^i_{k_1\ldots k_s} \equiv 0 \quad (q=\overline{1,3}), \tag{7}$$

и, наконец, должна совпасть дифференциальная система автополярных линий связности γ^4 с исходной системой, т.е.

$$\overline{V}_5^i = \Gamma^i_k V_4^k + 4\Gamma^i_{ke}V_3^k V_1^e + 3\Gamma^i_{ke}V_2^k V_2^e + 6\Gamma^i_{kes}V_1^k V_1^e V_1^s + \Gamma^i_{kesj}V_1^k V_1^e V_1^s V_1^j, \tag{8}$$

где $\overline{V}_5^i$ обозначают правую часть уравнений системы (I), записанных в общем репере. Рассмотрим величины

$$\gamma^i_{ke} = \frac{1}{5}\left(V^{i41}_{5ke} + 2V^{i42}_{5kq}\Gamma^q_{1e} + 3V^{i43}_{5kq}\Gamma^q_{2e} + 4V^{i44}_{5kq}\Gamma^q_{3e}\right), \tag{9}$$

соответствующие уравнения которых имеют вид

$$d\gamma^i_{ke} + \{\ \} + \omega^i_{ke} = \gamma^{i\,\varrho}_{ke\delta}\,\Delta V^\delta_\varrho. \tag{9'}$$

Ясно, что γ_{ke} образуют компоненты обычного объекта аффинной связности над $T^4(V_n)$. Для базисной производной объекта γ^i_{ke}

$$\overset{*}{\gamma}{}^i_{kes} = \gamma^{i\,0}_{kes} + \gamma^{i\,1}_{keq}\Gamma^q_{1s} + \gamma^{i\,2}_{keq}\Gamma^q_{2s} + \gamma^{i\,3}_{keq}\Gamma^q_{3s} + \gamma^{i\,4}_{keq}\Gamma^q_{4s} \tag{IO}$$

имеем

$$d\overset{*}{\gamma}{}^i_{kes} + \{\ \} + \gamma^q_{ke}\omega^i_{sq} - \gamma^i_{qe}\omega^q_{ks} - \gamma^i_{kq}\omega^q_{es} + \omega^i_{kes} = \overset{*}{\gamma}{}^{i\,\varrho}_{kes\delta}\,\Delta V^\delta_\varrho, \tag{IO'}$$

откуда заключаем, что величины

$$\gamma^i_{kes} = \overset{*}{\gamma}{}^i_{kes} + \gamma^i_{qe}\gamma^q_{ks} + \gamma^i_{kq}\gamma^q_{es} - \gamma^i_{qs}\gamma^q_{ke} \tag{II}$$

со структурными уравнениями

$$d\gamma^i_{kes} + \{\ \} - \gamma^i_{qs}\omega^q_{ke} + \gamma^q_{ks}\omega^i_{eq} + \gamma^q_{es}\omega^i_{kq} + \omega^i_{kes} = \gamma^{i\,\varrho}_{kes\delta}\,\Delta V^\delta_\varrho \tag{II'}$$

образуют компоненты объекта аффинной связности второго порядка.

Т е о р е м а . Дифференциальная система (I) сильно приводимого типа с помощью струй четвертого порядка $j^4 f^5 : T^4(V_n) \to J^4(T^4(V_n), T^5(V_n))$ по формулам охвата

$$
\begin{cases}
\Gamma^i_s = \Gamma^i_{1s}, \quad \Gamma^i_{ks} = \Gamma^i_{(k|s)}, \quad \Gamma^i_{kes} = \Gamma^i_{(k|e|s)} + \Gamma^i_{[q|(k]}\gamma^q_{es)}, \\
\Gamma^i_{kejs} = \Gamma^i_{(k|e|j|s)} + 2\Gamma^i_{[q|(k|e]}\gamma^q_{js)} + 2\Gamma^i_{[q|(k]}\gamma^q_{ejs)} - 2\Gamma^i_{[q|(k]}\gamma^\delta_{js}\gamma^q_{e)\delta},
\end{cases}
\tag{12}
$$

где

$$
\begin{cases}
\Gamma^i_{k|s} = \Gamma^{i0}_{1ks} + \Gamma^{i1}_{1kq}\Gamma^q_{1s} + \Gamma^{i2}_{1kq}\Gamma^q_{2s} + \Gamma^{i3}_{1kq}\Gamma^q_{3s} + \Gamma^{i4}_{1kq}\Gamma^q_{4s}, \\
\Gamma^i_{k|e|s} = \Gamma^{i\,0}_{k|es} + \Gamma^{i\,1}_{k|eq}\Gamma^q_{1s} + \Gamma^{i\,2}_{k|eq}\Gamma^q_{2s} + \Gamma^{i\,3}_{k|eq}\Gamma^q_{3s} + \Gamma^{i\,4}_{k|eq}\Gamma^q_{4s}, \\
\Gamma^i_{k|e|j|s} = \Gamma^{i\,0}_{k|e|js} + \Gamma^{i\,1}_{k|e|jq}\Gamma^q_{1s} + \Gamma^{i\,2}_{k|e|jq}\Gamma^q_{2s} + \Gamma^{i\,3}_{k|e|jq}\Gamma^q_{3s} + \Gamma^{i\,4}_{k|e|jq}\Gamma^q_{4s},
\end{cases}
\tag{13}
$$

определяет нелинейную стабильную связность четвертого порядка, проектирующуюся в силу канонической проекции $J^4(V_n, T(V_n)) \to T^5(V_n)$ в исходную систему, которая в свою очередь выполняет геометрическую функцию системы дифференциальных уравнений линий на V_n с автополярными относительно γ^4 скоростями четвертого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть теоремы следует из того, что для величин (5) справедливы уравнения

$$
\begin{aligned}
d\Gamma^i_{\lambda s} + \{\ \} + \lambda! \sum_{q=2}^{\lambda} \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_q=\lambda} \frac{1}{\alpha_1!}\Gamma^{k_1}_{\alpha_1 s}\frac{1}{\alpha_2!}V^{k_2}_{\alpha_2}\cdots\frac{1}{\alpha_q!}V^{k_q}_{\alpha_q}\,\omega^i_{k_1\dots k_q} + \\
+ \lambda! \sum_{q=1}^{\lambda} \frac{1}{q!} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_q=\lambda} \frac{1}{\alpha_1!}V^{k_1}_{\alpha_1}\cdots\frac{1}{\alpha_q!}V^{k_q}_{\alpha_q}\,\omega^i_{k_1\dots k_q s} = \Gamma^{i\,\rho}_{\lambda s\delta}\,\Delta V^\delta_\rho,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

используя которые, из (13) можно получить уравнения величин $\Gamma^i_{k|s}$, $\Gamma^i_{k|e|s}$, $\Gamma^i_{k|e|j|s}$; просимметрировав их по нижним индексам и подставив в (12), убедимся, что сконструированные таким образом объекты Γ^i_s, Γ^i_{ks}, Γ^i_{kes}, Γ^i_{kejs} в точности удовлетворяют равенствам (6). Для доказательства второй части теоремы поступим следующим образом. По условию исходная система относится к сильно приводимому типу, т.е. для нее выполнены тождества (4), частичные продолжения которых дают следующие тождества:

$$
V^{i4}_{5k} \equiv V^{i41}_{5kq}V^q_1 + 2V^{i42}_{5kq}V^q_2 + 3V^{i43}_{5kq}V^q_3 + 4V^{i44}_{5kq}V^q_4,
\tag{15}
$$

и, значит, используя (9), получим

$$
V^i_2 = \tfrac{1}{5}V^{i4}_{5k}V^k_1 \equiv \gamma^i_{ke}V^k_1V^e_1.
\tag{16}
$$

Первая часть уравнений (7) выполнена по условию задачи

$$
V^i_2 - \Gamma^i_k V^k_1 \equiv 0.
\tag{17}
$$

Применение к этим тождествам оператора полной производной, выраженного в силу сильной приводимости системы через базисную производную, дает новые тождества

$$
V^i_3 - \Gamma^i_k V^k_2 - \Gamma^i_{ke}V^k_1V^e_1 \equiv 0,
\tag{18}
$$

которые совпадают со второй частью искомых. Применив оператор полной

производной еще раз, получим

$$
V^i_4 - \Gamma^i_k V^k_3 - 3\Gamma^i_{ke}V^k_2V^e_1 - \Gamma^i_{kes}V^k_1V^e_1V^s_1 - \Gamma^i_{[q|k]}V^q_2V^k_1 + \Gamma^i_{[q|k]}\gamma^q_{es}V^e_1V^s_1V^k_1 \equiv 0,
$$

что в силу (16) равносильно тождеству

$$
V^i_4 - \Gamma^i_k V^k_3 - 3\Gamma^i_{ke}V^k_2V^e_1 - \Gamma^i_{kes}V^k_1V^e_1V^s_1 \equiv 0.
\tag{19}
$$

Значит, условия стабильности выполнены. Осталось доказать равенства (8). Полная производная тождеств (19) отличается от (8) лишь ненужным "хвостом":

$$
-2\Gamma^i_{[p|k]}V^p_3V^k_1 + 2\Gamma^i_{[p|(k]}\gamma^p_{ejs)}V^k_1V^e_1V^j_1V^s_1 + 2\Gamma^i_{[p|(k]}\gamma^p_{qe]}\gamma^q_{js)}V^k_1V^e_1V^j_1V^s_1
\tag{20}
$$

Но учитывая проведенные вычисления, в (18) можно провести подстановки

$$
\begin{gathered}
\Gamma^i_k V^k_2 \equiv \gamma^i_{ks}\gamma^k_{je}V^s_1V^j_1V^e_1, \\
\Gamma^i_{k|s}V^k_1V^s_1 \equiv (\overset{k}{\gamma}{}^i_{es} + \gamma^i_{kp}\gamma^p_{se})V^k_1V^e_1V^s_1,
\end{gathered}
\tag{21}
$$

после чего будем иметь

$$
V^i_3 \equiv (\gamma^i_{jes} + \gamma^i_{pj}\gamma^p_{es})V^j_1V^e_1V^s_1,
\tag{22}
$$

и, значит, (20) есть нуль. Теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что указанные формулы охвата (12) могут быть полностью доведены до явных выражений через относительные, а значит, и обычные локальные координаты струи $j^4 f^5$, однако получаемые выражения слишком громоздки. Отметим также, что если система (1) не будет сильно приводимой, те же формулы (12) дадут связность. Но лишь в случае сильно приводимой системы можно сделать главный вывод, что все ее инвариантные свойства и сама система полностью могут быть описаны в терминах нелинейной связности четвертого порядка стабильного типа.

Библиографический список

1. Е в т у ш и к Л.Е. Нелинейные связности высших порядков // Изв. вузов. Матем. 1969. №2.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Третьяков В.Б. О структурах, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка // Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ. М., 1974. Т.6.

3. Е в т у ш и к Л.Е. Стабильные нелинейные связности высших порядков и редукции к ним обыкновенных дифференциальных систем соответствующего порядка // Теория функций и ее применения. Кемерово, 1985.

4. Е в т у ш и к Л.Е., Третьяков В.Б. Инвариантное описание обыкновенных систем в терминах нелинейной связности // Изв. вузов. Матем. 1986. №1.

9 Зак. 1209