УДК 514.75

М. В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

О ПОДКЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ПОРОЖДЕННОГО КОМПЛЕКСАМИ ГИПЕРКВАДРИК

В многомерном аффинном пространстве рассматриваются подклассы дифференцируемого отображения, порожденного комплексами центральных невырожденных гиперквадрик. Показано, что такие комплексы существуют. Найдены геометрические свойства конуса главных прямых, характеристических направлений и индикатрис исследуемых отображений.

Ключевые слова: комплекс, гиперквадрика, отображение, аффинное пространство, репер, ранг отображения, тензор, симметрирование, индикатриса, характеристическое направление, главная прямая, гиперплоскость, фундаментальный объект, характеристическое многообразие, гомотетия.

В настоящей работе продолжается [2] изучение геометрии порожденного комплексами K_n центральных невырожденных гиперквадрик q отображения

$$f : C \in A_n \to q \in R(q), \tag{1}$$

где $R(q)$ — пространство центральных невырожденных гиперквадрик q, а C — центр гиперквадрики q. Рассматриваются некоторые подклассы отображения f в частично канонизированном репере R_0 [2], который геометрически характеризуется тем, что его вершина A совмещена с центром гиперквадрики q.

Проводимые в работе рассмотрения носят локальный характер. Все встречающиеся в ней функции предполагаются аналитическими. Кроме того, если не оговорено противное, предполагается, что рассматриваемые отображения имеют максимальный возможный ранг [5] в каждой точке области определения. Методика исследования основана на применении инвариантного теоретико-группового метода Г. Ф. Лаптева [3].

В репере R_0 система дифференциальных уравнений отображения *f* имеет вид:

$$\nabla a_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma},\ \alpha,\beta,\ldots = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Замыкая систему (2), получим

$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma} \wedge \omega^{\gamma} = 0. \tag{3}$$

Разрешая уравнения по лемме Картана, находим:

$$\nabla\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}\omega^{\delta}, \tag{4}$$

причем

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda_{\alpha\beta\delta\gamma}. \tag{5}$$

Пусть фиксированная гиперквадрика $q^0 \in R(q)$ с центром C^0 задается уравнением

$$\overset{o}{a}_{\alpha\beta}\,\mathrm{X}^{\alpha}\mathrm{X}^{\beta} - 1 = 0, \tag{6}$$

а гиперквадрика $q \in R(q)$ — уравнением

$$a_{\alpha\beta}\mathrm{X}^{\alpha}\mathrm{X}^{\beta} + 2a_{\alpha}\mathrm{X}^{\alpha} - 1 = 0. \tag{7}$$

Пусть T_{α} — некоторый тензор. Рассмотрим случай, когда при отображении f для компонент $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$ фундаментального объекта второго порядка комплекса K_n имеет место:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\Lambda_{\alpha\beta(\gamma}T_{\delta)}, \tag{8}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование. Отображение f, обладающее в точке C^0 указанным свойством, будем называть отображением f_1. В этом случае система уравнений, определяющая индикатрису J_ψ [2, с. 21], имеет вид:

$$2\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\,\mathrm{X}^\gamma (T_\delta \mathrm{X}^\delta - 1) = 0. \tag{9}$$

Индикатриса J_ψ состоит из точки C^0 и гиперплоскости $H_\psi(T_\alpha)$, определяемой уравнением:

$$T_\alpha \mathrm{X}^\alpha - 1 = 0. \tag{10}$$

Из определения ψ-характеристических направлений [1, с. 13] следует, что любое направление в точке C^0 в случае отображения f_1 является ψ-характеристическим.

Теорема 1. *Конус* $K_\psi(0)$*-главных прямых* [2, с. 15] *в случае отображения* f_1 *вырождается в гиперплоскость, параллельную гиперплоскости* $H_\psi(T_\alpha)$, *инцидентную точке* $\tilde{N}^0$.

Доказательство. В случае отображения f_1 уравнения конуса $K_\psi(0)$-главных прямых принимают следующий вид:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{X}^\gamma T_\delta \mathrm{X}^\delta = 0. \tag{11}$$

Так как ранг отображения ψ равен $\tilde{N}^2_{n+1}$, то уравнения

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{X}^\gamma = 0 \tag{12}$$

имеют только тривиальное решение, поэтому система (11) эквивалентна следующему уравнению:

$$T_\alpha \mathrm{X}^\alpha = 0, \tag{13}$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы:

Теорема 2. *Любое* φ*-характеристическое направление* [2, с. 23] *в случае отображения* f_1 *является* f*-характеристическим направлением* [2, с. 23].

Доказательство. Система уравнений индикатрисы J_f [2, с. 21] отображения *f* в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} &T_\alpha X^\alpha - 1 = 0, \\ &\Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\beta X^\gamma - \overset{o}{a}_{\alpha\beta} X^\beta = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Тогда утверждение теоремы следует из определения *f*-характеристических и φ-характеристических направлений.

Рассмотрим случай, когда при отображении *f* для компонент $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ фундаментального объекта первого порядка комплекса K_n выполняется условие:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} = \Lambda_{\alpha\,(\beta\gamma)}. \tag{15}$$

Отображение *f*, обладающее в точке $\tilde{N}^0$ указанным свойством, будем называть отображением f_2. В рассматриваемом случае справедлива следующая

Теорема 3. *Характеристическое многообразие* [4] *гиперквадрики* q^0, *ассоциированной с комплексом* K_n, *совпадает с образом индикатрисы* J_φ *отображения* φ *при гомотетии с центром в точке* $\tilde{N}^0$ *и коэффициентом, равном двум.*

Доказательство. Известно (см. [4]), что характеристическое многообразие гиперквадрики q^0, ассоциированной с комплексом K_n, является инвариантным и задается следующей системой уравнений:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} X^\beta X^\gamma - 2\overset{o}{a}_{\alpha\beta} X^\beta = 0. \tag{16}$$

Система уравнений индикатрисы J_φ отображения φ в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\Lambda_{\beta\gamma\alpha} X^\beta X^\gamma - \overset{o}{a}_{\alpha\beta} X^\beta = 0. \tag{17}$$

Тогда при гомотетии с центром в точке $\tilde{N}^0$ и коэффициентом, равном двум, индикатриса J_φ отображения φ переходит в характеристическое многообразие гиперквадрики q^0.

Список литературы

1. *Андреев Б.А.* О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 3. Калининград, 1973. С. 6—19.

2. *Кретов М.В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве. Калининград, 1981. Деп. в ВИНИТИ АН СССР, №3003-81.

3. *Лаптев Г.В.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Малаховский В.С.*, *Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в *n*-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 6. Калининград, 1974. С. 113—133.

5. *Рыжков В. В.* Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Тр. геом. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР. М., 1971. Т. 3. С. 235—242.

M. Kretov

ON SUBCLASSES OF THE DIFFERENTIABLE MAPPING GENERATED BY COMPLEXES OF HYPERQUADRICS

In multidimensional affine space, subclasses of the differentiable mapping generated by complexes of central nondegenerate hyperquadrics are considered. It is shown, that such complexes exist. Geometrical properties of a cone of the main straight lines, characteristic directions and indicatrix of the researched mappings are found.