УДК 514.7

С. В. Хохлов[1], ***Л. А. Игнаточкина***[2]
[1, 2] *Московский педагогический государственный университет, Россия*
[1] hohlov@yahoo.com, [2] ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-12

Инвариантность некоторых классов почти эрмитовых структур относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли

Рассмотрены почти эрмитовы структуры и структуры типа W_4 в классификации Грея — Херbegin. Рассуждения проведены с использованием инвариантного исчисления Кошуля. Исследованы условия инвариантности келеровой формы относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной векторным полем Ли в структурах типа W_4, и показано, что келерова форма ковариантно постоянна относительно векторного поля Ли. Исследованы условия инвариантности римановой метрики под действием однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли. Доказан критерий инвариантности почти комплексной структуры относительно локальной группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли в классе W_4.

Установлено, что инвариантность римановой структуры g влечет инвариантность почти комплексной структуры для класса W_4 многообразий в классификации Грея — Херbegin, получены условия ковариантного постоянства формы Ли в отдельных классах многообразий размерностей выше 4.

Ключевые слова: почти эрмитова структура, почти комплексная структура, вектор Ли, форма Ли

Поступила в редакцию 30.05.2022 г.

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие; n четно; $dimM > 2$, $\mathfrak{X}(M)$ — $C^{\infty}(M)$-модуль гладких векторных полей на M; d — оператор внешнего дифференцирования; δ — оператор кодифференцирования; L_X — оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X.

Почти эрмитовой структурой на M называется пара (g, J), где g — риманова структура на M, а J — почти комплексная структура на M, согласованная с g, то есть

$$J \circ J = -id \ ; \ g(JX, JY) = g(X, Y)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Келеровой формой на эрмитовом многообразии М называется 2-форма F такая, что

$$F(X, Y) = g(JX, Y) \text{ для любых } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \qquad (1)$$

Формой Ли называется 1-форма ω, которая определяется следующим образом:

$$\omega(X) = \frac{-1}{n-1} \delta F(JX). \qquad (2)$$

Вектором Ли называется двойственное форме Ли векторное поле ξ такое, что

$$g(\xi, X) = \omega(X). \qquad (3)$$

Напомним, что, согласно [3], структура $S = \{ T_1, ..., T_k \}$ на M называется ξ-инвариантной тогда и только тогда, когда $L_{\xi}(T_k) = 0$, $k = 1, ..., n$.

В [4] доказано, что структура S является ξ-инвариантной, если каждое из тензорных полей, ее составляющих, инвариантно относительно локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов.

Получим условия инвариантности J-почти комплексной структуры в некоторых классах почти эрмитовых многообразий.

Согласно классификации Грея — Хервеллы [1], класс W_4 почти эрмитовых многообразий определяется тождеством

$$\nabla_X(F)(Y,Z)=\frac{-1}{2(n-1)}(g(X,Y)\delta F(Z)-$$

$$-g(X,Z)\delta F(Y)-g(X,JY)\delta F(JZ)+g(X,JZ)\delta F(JY)).$$

Заметим, что

$$\delta F(Z)=\delta F(-J(JZ))=\frac{-1}{n-1}\delta F(J(JZ))(n-1)=$$

$$=(n-1)\omega(JZ), \tag{4}$$

$$\delta F(JZ)=(1-n)\omega(Z).$$

Следовательно, из определения класса W_4 с учетом (3) и (4) получаем

$$\nabla_X(F)(Y,Z)=\frac{-1}{2(n-1)}(g(X,Y)(n-1)\omega(JZ)-$$

$$-g(X,Z)(n-1)\omega(JY)-g(X,JY)(1-n)\omega(Z)+$$

$$+g(X,JZ)(1-n)\omega(Y))=\frac{1}{2}(-g(X,Y)\omega(JZ)+g(X,Z)\omega(JY)-$$

$$-g(X,JY)\omega(Z)+g(X,JZ)\omega(Y)).$$

Взяв $X=\xi$, с учетом (3) получим

$$\nabla_\xi(F)(Y,Z)=\frac{1}{2}(-g(\xi,Y)\omega(JZ)+g(\xi,Z)\omega(JY)-$$

$$-g(\xi,JY)\omega(Z)+g(\xi,JZ)\omega(Y))=\frac{1}{2}(-\omega(Y)\omega(JZ)+$$

$$+\omega(Z)\omega(JY)-\omega(JY)\omega(Z)+\omega(JZ)\omega(Y))=0,$$

откуда следует

Лемма. *В классе* W_4 *для любых* $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

$$\nabla_\xi(F)(Y,Z) = 0. \qquad (5)$$

Теорема 1 (*критерий инвариантности почти комплексной структуры относительно локальной группы диффеоморфизмов, порожденных векторным полем Ли в классе* W_4). *Почти комплексная структура* J ξ*-инвариантна в классе* W_4 *тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{JY}\xi = J(\nabla_Y \xi). \qquad (6)$$

Действительно, ковариантно продифференцировав (1), получим

$$\nabla_\xi(F)(Y,Z) = g(\nabla_\xi(J)Y, Z), \qquad (7)$$

а значит, с учетом леммы, $g(\nabla_\xi(J)Y, Z) \equiv 0,$ что вместе с невырожденностью метрики g влечет $\nabla_\xi(J)Y \equiv 0.$

Поскольку

$$L_\xi(J)Y = L_\xi(JY) - J(L_\xi(Y)) = [\xi, JY] - J([\xi, Y]) =$$

$$= \nabla_\xi(JY) - \nabla_{JY}\xi - J(\nabla_\xi Y) + J(\nabla_Y \xi) =$$

$$= -\nabla_{JY}\xi + J(\nabla_Y \xi) = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Почти комплексная структура* J ξ*-инвариантна в классе* W_4 *тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{JX}(\omega)(Y) + \nabla_X(\omega)(JY) = 0 \qquad (8)$$

для любых X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Действительно, учитывая, что

$$L_\xi(J)X = \nabla_\xi(J)X - \nabla_{JX}\xi + J(\nabla_X\xi),$$

получим

$$g(L_\xi(J)X,Y) = g(\nabla_\xi(J)X,Y) - g(\nabla_{JX}\xi,Y) + g(J(\nabla_X\xi),Y)) =$$
$$= \nabla_\xi(F)(X,Y) - \nabla_{JX}(\omega)(Y) - \nabla_X(\omega)(JY) =$$
$$= -\nabla_{JX}(\omega)(Y) - \nabla_X(\omega)(JY),$$

и, допустив $L_\xi(J)X = 0,$ получаем прямое утверждение. Обратное очевидно следует из невырожденности формы g.

Теорема 3. *Риманова структура g ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда для любых X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ выполнено*

$$\nabla_X(\omega)Y + \nabla_Y(\omega)X = 0\,. \tag{9}$$

Для доказательства вычислим производную Ли римановой метрики.

$$L_\xi(g(X,Y)) = L_\xi(g)(X,Y) + g(L_\xi X,Y) + g(X,L_\xi Y)\,.$$

Отсюда

$$L_\xi(g)(X,Y) = \xi(g(X,Y)) - g([\xi,X],Y) - g(X,[\xi,Y]) =$$
$$= \xi(g(X,Y)) - g(\nabla_\xi X,Y) + g(\nabla_X\xi,Y) - g(X,\nabla_\xi Y) +$$
$$+ g(X,\nabla_Y\xi).$$

Поскольку

$$\nabla_\xi(g(X,Y)) = \xi(g(X,Y)) = \nabla_\xi(g)(X,Y) + g(\nabla_\xi X,Y) +$$
$$+ g(X,\nabla_\xi Y),$$

получаем

$$L_\xi(g)(X,Y)) = g(\nabla_X\xi,Y) + g(X,\nabla_Y\xi). \tag{10}$$

Ковариантно продифференцировав по X равенство (3), получаем $g(X,\nabla_Y\xi)=\nabla_Y(\omega)X$, что с учетом (10) завершает доказательство.

В [2] было доказано, что для собственных многообразий класса $W_1\oplus W_4$ (а значит, и в подклассе W_4) размерностей $dimM>4$ форма Ли замкнута, то есть справедливо равенство

$$d\omega=\nabla_X(\omega)Y-\nabla_Y(\omega)X=0 \tag{11}$$

для любых X, $Y\in\mathfrak{X}(M)$.

Следствие. *В классе собственных многообразий из* W_4 *размерности выше 4* ξ*-инвариантность римановой метрики g влечет* ξ*-инвариантность почти комплексной структуры J. При этом форма Ли ковариантно постоянна в римановой связности* ∇*, то есть* $\nabla_X(\omega)\equiv 0$.

Действительно, из (9) и (11) следует, что $\nabla_X(\omega)Y\equiv 0$, что влечет выполнимость условия (8).

Список литературы

1. *Gray A., Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1980. Vol. 123, №4. P. 35—58.

2. *Игнаточкина Л. А.* Многообразия Вайсмана — Грея с J-инвариантным тензором конформной кривизны // Матем. сб. 2003. Т. 194, №2. С. 61—72.

3. *Кобаяши Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981.

4. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. М., 2003.

MSC 2010: 53C15, 53D15

S. V. Khokhlov[1], *L. A. Ignatochkina*[2]
[1, 2] *Moscow Pedagogical State University*
1/1 M. Pirogovskaya St., Moscow, 119991, Russia
[1] hohlov@yahoo.com, [2] ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-12

Invariance of some classes of almost Hermitian structures concerning to the one-parameter group of diffeomorphisms generated by the Lie vector field

Submitted on May 30, 2022

Finding the conditions for the invariance of geometric objects under the action of transformation groups is one of the main objects of geometric research. Almost Hermitian structures and structures of the Gray — Hervella classification on smooth manifolds are considered in this paper. All arguments are given using invariant Koszul's calculus. Conditions for the invariance of the Kähler form in type structures are investigated and it is shown that the Kähler form is covariantly constant with respect to the Lie vector field. Conditions for the invariance of the Riemannian metric under the action of a one-parameter group of diffeomorphisms generated by a Lie vector field are studied. A criterion for the invariance of an almost complex structure with respect to the local group of diffeomorphisms generated by the Lie vector field in the class W_4 is proved.

Conditions for the invariance of an operator of an almost complex structure, a tensor of a Riemannian metric, are proved. It is established that the invariance of the Riemannian structure g implies the invariance of the operator of an almost complex structure for some class of manifolds according to the Gray — Hervella classification, and conditions for the covariant constancy of the Lie form in certain classes of manifolds of dimensions above four were obtained. It is proved that the Lie form is covariantly constant in some classes of the type of dimensions above four.

Keywords: almost Hermitian structure, almost complex structure, Lie vector, Lie form

References

1. *Gray, A., Hervella, L. M.:* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. Ann. Mat. Pura ed Appl., **123**:4, 35—58 (1980).

2. *Ignatochkina, L. A.:* Vaisman — Gray manifolds with *J*-invariant conformal curvature tensor. Sb. Math., **194**:2, 61—72 (2003).

3. *Kobayashi, Sh., Nomizu, K.:* Foundations of Differential Geometry. Moscow (1981).

4. *Aminova, A. V.:* Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. Moscow (2003).