ной образующей.

Достаточность. Пусть существует линейчатая поверхность S такая, что конгруэнция M_2 образована гиперболическими параболоидами Q, касающимися поверхности S вдоль общих прямолинейных образующих. Отнесем конгруэнцию M_2 к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где $A\in\ell_1$, вектор $\bar{e}_1$ направлен по общей прямолинейной образующей параболоида Q и линейчатой поверхности S, вектор $\bar{e}_2$ -по второй прямолинейной образующей параболоида Q, проходящей через точку A, вектор $\bar{e}_3$ -по диаметру параболоида Q, уравнение параболоида Q при надлежащей нормировке векторов $\bar{e}_\alpha$ приводится к виду (1), а пфаффовы уравнения линейчатой поверхности S имеют вид:

$$\omega^3=0,\ \omega_1^2=\alpha\omega^2,\ \omega_1^3=\beta\omega^2. \qquad (12)$$

Продолжая систему (I2), находим:

$$\begin{aligned}\delta\alpha&=\alpha\pi_1^1-\alpha^2\pi^1-\beta\pi_3^2,\\ \delta\beta&=-\beta\alpha\pi^1-2\beta\pi_3^3-\alpha\pi_2^3.\end{aligned} \qquad (13)$$

Фиксируем оставшиеся вторичные параметры так, чтобы

$$\alpha=0,\ \beta=1. \qquad (14)$$

Уравнения (I2) приводятся к виду (5) и определяют конгруэнцию M_2^1.

Список литературы

I. Малаховский В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.7, Калининград, 1976, 54-60.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Ю.И.Попов

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ МНОГОМЕРНОЙ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [1] строятся поля геометрических объектов в окрестностях второго и третьего порядков элемента m-мерной распадающейся гиперполосы RH_m^τ [2],[3] ранга τ проективного пространства P_n $(\tau<m<n)$. Для распадающейся гиперполосы RH_m^τ построен внутренний инвариантный репер третьего порядка, как с помощью первой пары нормальных квазитензоров (§2), так и с помощью второй пары нормальных квазитензоров (§4). Дана геометрическая интерпретация некоторых геометрических оснащающих объектов гиперполосы RH_m^τ. В общем случае найдено поле двупараметрической связки соприкасающихся гиперквадрик, внутренним инвариантным образом присоединенных к исследуемой гиперполосе RH_m^τ.

Обозначения и замечания:

1^0. Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$$p,q,t,f,\ldots=1,2,\ldots,\tau;\quad i,j,k,\ell,s,\ldots=\tau+1,\ldots,m;$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n-1; \quad \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \ldots = 0, 1, \ldots, n$

2^0. Оператор дифференцирования ∇ действует по закону

$$\nabla B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} = d B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} - B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{J} \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1} - \ldots - B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{J}} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_u} +$$

$$+ B^{\mathcal{J} \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} \omega^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}} + \ldots + B^{\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \ldots \mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1 \mathcal{K}_2 \ldots \mathcal{K}_w} \omega^{\mathcal{I}_u}_{\mathcal{J}}, \quad u, w = 1, 2, \ldots$$

3^0. Символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$ при фиксированных главных параметрах через $\pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

4^0. Символы вида

$$[A_{\mathcal{I}_1}, A_{\mathcal{I}_2}, \ldots, A_{\mathcal{I}_u}] \equiv [A_u] \text{ и } [\tau^{\mathcal{I}_1}, \tau^{\mathcal{I}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{I}_w}] \equiv [\tau^W]$$

обозначают соответственно $(u-1)$-плоскость E_{u-1}, натянутую на линейно независимые точки $A_{\mathcal{I}_1}, A_{\mathcal{I}_2}, \ldots, A_{\mathcal{I}_u}$, и $(n-W)$-плоскость E_{n-W}, являющуюся пересечением линейно независимых гиперплоскостей $\tau^{\mathcal{I}_1}, \tau^{\mathcal{I}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{I}_w}$.

5^0. В данной работе исключаются из рассмотрения те распадающиеся гиперполосы RH^τ_m, для которых абсолютный инвариант второго порядка t^i_α (§4) равен нулю, в частности, плоские и конические распадающиеся гиперполосы RH^τ_m [2], [4].

§I. Задание распадающейся гиперполосы RH^τ_m в проективном пространстве P_n

Вырожденная гиперполоса CH^τ_m [2] называется распадающейся, если гиперповерхность V^τ_{n-1}, огибающая главные касательные гиперплоскости τ гиперполосы CH^τ_m, распадается

на две тангенциально вырожденные поверхности V^τ_m и V^τ_{n-s-1} с общей направляющей поверхностью V_τ (V_τ -множество всех центров плоских образующих E_s ($s = m-\tau$) базисной поверхности V^τ_m данной гиперполосы [3]).

Распадающуюся нормально-центрированную m-мерную гиперполосу ранга τ обозначим символом RH^τ_m. Присоединим к гиперполосе RH^τ_m подвижной репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ первого порядка, полагая $A_0 = A, \tau^n = \tau$, где A – центр плоской образующей E_s базисной поверхности V^τ_m, а τ – главная касательная гиперплоскость [5] гиперполосы RH^τ_m. Далее, точки $\{A_p\}$ поместим в касательную плоскость T_τ поверхности V_τ, точки $\{A_i\}$ – в плоскость E_s, точки $\{A_\alpha\}$ – в $(n-m-1)$-мерную плоскость E_{n-m-1} – плоскую образующую поверхности V^τ_{n-s-1}, точка A_n пусть занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_0, A_p, A_i, A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ пространства P_n.

Относительно выбранного репера 1-го порядка вырожденная гиперполоса RH^τ_m задается следующими пфаффовыми уравнениями:

$$\omega^n_0 = 0, \quad (1.1) \qquad \omega^i_0 = 0, \quad (1.2) \qquad \omega^\alpha_0 = 0, \quad (1.3)$$

$$\omega^n_i = 0, \quad (1.4) \qquad \omega^n_\alpha = 0, \quad (1.5)$$

$$\omega^\alpha_i = 0, \quad (1.6) \qquad \omega^i_\alpha = 0, \quad (1.7)$$

$$\omega^p_i = b^{pq}_i \omega^n_q = a^p_{iq} \omega^q, \quad b^{pq}_i = b^{qp}_i; \quad (1.8)$$

$$\omega^\alpha_p = b^\alpha_{pq} \omega^q = a^{\alpha q}_p \omega^n_q, \quad b^\alpha_{pq} = b^\alpha_{qp}; \quad (1.9)$$

$$\omega_\alpha^p = b_\alpha^{pq}\omega_q^n = a_{\alpha q}^p \omega^q, \quad b_\alpha^{pq} = b_\alpha^{qp}. \qquad (1.11)$$

и конечными соотношениями

$$a_{iq}^p b_{pt}^\alpha = a_{it}^p b_{pq}^\alpha, \qquad (1.12)$$

$$a_{\alpha q}^p b_{pt}^i = a_{\alpha t}^p b_{pq}^i, \qquad (1.13)$$

которые вытекают из продолжений уравнений (I.6) и (I.7) с учетом уравнений (I.8)-(I.II). Формы $\omega^p = \omega_0^p$ являются базисными формами гиперполосы RH_m^τ, отнесенной к подвижному точечному реперу $\{A_\gamma\}$, а формы ω_p^n являются базисными формами данной гиперполосы, отнесенной к подвижному тангенциальному реперу (τ^γ). Кроме того, формы ω^p и ω_p^n связаны соотношениями:

$$\omega_p^n = a_{pq}\omega^q, \text{ где } a_{pq} = a_{qp}, \quad a = \det\|a_{pq}\| \neq 0. \qquad (1.14)$$

Уравнения (1.1)-(1.3) задают поверхность центров V_τ плоских образующих E_s базисной поверхности V_m^τ гиперполосы RH_m^τ, уравнения (1.1),(1.2),(1.5),(1.7),(1.10),(1.11), (I.13) определяют тангенциально вырожденную поверхность V_{n-s-1}^τ, уравнения (1.1),(1.3),(1.4),(1.6),(1.8),(1.9),(1.12) определяют базисную поверхность V_m^τ гиперполосы RH_m^τ.

Продолжая уравнения (1.8)-(1.11),(1.14), находим:

$$\nabla a_{pq} = -a_{pq}(\omega_0^0 + \omega_n^n) + a_{pqt}\omega^t, \qquad (1.15)$$

$$\nabla b_i^{pq} = b_i^{pq}\omega_n^n + a^{pq}\omega_i^0 - b_i^{pqt}\omega_t^n, \qquad (1.16)$$

$$\nabla b_{pq}^i = -b_{pq}^i\omega_0^0 - a_{pq}\omega_n^i + b_{pqt}^i\omega^t, \qquad (1.18)$$

$$\nabla b_\alpha^{pq} = b_\alpha^{pq}\omega_n^n + a^{pq}\omega_\alpha^0 - b_\alpha^{pqt}\omega_t^n, \qquad (1.19)$$

где величины $a_{pqt}, b_{pqt}^\alpha, b_{pqt}^i, b_\alpha^{pqt}, b_i^{pqt}$ симметричны по индексам p, q, t.

Рассмотрим матрицу $\|a^{pq}\|$, обратную матрице $\|a_{pq}\|$:

$$a_{pq}a^{qt} = \delta_p^t. \qquad (1.20)$$

Дифференцируя эти соотношения с учетом (1.15), получим:

$$\nabla a^{pq} = a^{pq}(\omega_0^0 + \omega_n^n) - a^{pqt}\omega_t^n, \qquad (1.21)$$

где a^{pqt} симметричны по индексам p, q, t. Из уравнений (1.15) и (1.21) следует, что величины a_{pq}, a^{pq} являются относительными тензорами - основные двухвалентные тензоры распадающейся гиперполосы RH_m^τ.

Системы величин

$$\Gamma_2 = \{a_{pq}, a^{pq}, a_{pqt}, a^{pqt}, b_i^{pq}, b_{pq}^i, b_\alpha^{pq}, b_{pq}^\alpha\}$$
$$\Gamma_3 = \{\Gamma_2, b_i^{pqt}, b_{pqt}^i, b_\alpha^{pqt}, b_{pqt}^\alpha\}$$

образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков распадающейся гиперполосы RH_m^τ.

Дальнейшие продолжения системы (1.15)-(1.19),(1.21) вводят геометрические объекты четвертого и более высокого порядков, определяемые гиперполосой RH_m^τ. Таким образом получена последовательность фундаментальных геометрических объектов гиперполосы RH_m^τ.

Найдем условия инвариантности ряда геометрических образов, возникающих при построении инвариантного репера и ассоциированных в данной гиперполосой RH^{τ}_m. Прежде всего к каждому плоскому элементу (A_o, τ^n) гиперполосы RH^{τ}_m инвариантно присоединяются плоскости E_{n-m} и Π_{m-1} — соответственно нормали первого и второго рода в смысле А.П.Нордена [6] данной гиперполосы RH^{τ}_m.

Нормаль второго рода Π_{m-1} определим точками

$$M_p = A_p + x_p A_o, \quad M_i = A_i + x_i A_o.$$

Точки $\{M_p\}$ определяют инвариантную плоскость $E_{\tau-1}$, лежащую в касательной τ-плоскости E_{τ} поверхности V_{τ}. Условие инвариантности плоскости $E_{\tau-1}$ запишется в виде:

$$\delta M_p \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, M_q)$$

или

$$\nabla_\delta x_p = -x_p \pi^o_o - \pi^o_p. \tag{1.22}$$

Условие инвариантности плоскости $E_S \equiv [M_i]$ приводит к уравнениям:

$$\nabla_\delta x_i = -x_i \pi^o_o - \pi^o_i. \tag{1.23}$$

Инвариантную нормаль первого рода гиперполосы RH^{τ}_m — $(n-m)$-плоскость $E_{n-m} \equiv [A_o, A_\alpha, A_n]$ — зададим как пересечение гиперплоскостей

$$\sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n, \quad \sigma^i = \tau^i + y^i \tau^n.$$

Гиперплоскости $\{\sigma^p\}$ определяют инвариантную $(n-\tau)$-плоскость $E_{n-\tau}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую плоскую образующую $E_{n-\tau-1} \equiv [A_o, A_i, A_\alpha]$ вырожденной гиперповерхности V^{τ}_{n-1}.

Условие инвариантности плоскости $E_{n-\tau}$ имеет вид:

$$\delta \sigma^p \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, \sigma^q)$$

или

$$\nabla_\delta y^p = y^p \pi^n_n + \pi^p_n. \tag{1.24}$$

Гиперплоскости $\{\sigma^i\}$ определяют инвариантную $(n-S)$-плоскость E_{n-s}, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую касательную плоскость T_{n-s-1} вырожденной поверхности V^{τ}_{n-s-1}. Условие инвариантности этой плоскости

$$\delta \sigma^i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, \sigma^j),$$

и, следовательно, величины $\{y^i\}$ удовлетворяют условиям:

$$\nabla_\delta y^i = y^i \pi^n_n + \pi^i_n. \tag{1.25}$$

Кроме основных элементов инвариантного оснащения гиперполосы RH^{τ}_m — ее нормалей первого и второго рода, — определим еще инвариантную плоскость $E_{n-m-2} \equiv [M_\alpha] \equiv [A_\alpha + x_\alpha A_o]$, причем $E_{n-m-2} \subset E_{n-m-1}$. Из условия инвариантности плоскости E_{n-m-2} следует, что

$$\nabla_\delta x_\alpha = -x_\alpha \pi^o_o - \pi^o_\alpha. \tag{1.26}$$

Далее, выделим инвариантный пучок касательных гиперплоскостей

$$\sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha \tau^n,$$

где

$$\nabla_\delta y^\alpha = y^\alpha \pi^n_n + \pi^\alpha_n. \tag{1.27}$$

Гиперплоскости $\{\sigma^\alpha\}$ определяют инвариантную $(m+1)$-плоскость $E_{m+1} \equiv [\sigma^\alpha]$, проходящую через касательную m-плоскость T_m базисной поверхности V^{τ}_m гиперполосы RH^{τ}_m.

Определим точку

$$\overline{M}_n = A_n - y^p A_p - y^\alpha A_\alpha - y^i A_i$$

репера $\{M_\mathcal{J}\}$ таким образом, чтобы плоскость $E_{n-\tau} \equiv [E_{n-\tau-1}, \overline{M}]$ и прямая $h \equiv [A_0, \overline{M}_n]$ были инвариантны. Эти требования приводят к тому, что величины $\{y^p\}, \{y^i\}, \{y^\alpha\}$ удовлетворяют соответственно условиям (1.24), (1.25), (1.27).

Отметим, что задание полей квазитензоров $\{y^p\}, \{y^i\}, \{y^\alpha\}$ определяет поле инвариантных прямых $h(y) = [A_0, \overline{M}_n(y)]$ и, следовательно, поле инвариантных нормалей первого рода $E_{n-\tau}(y) \equiv [E_{n-\tau-1}, h(y)]$ поверхности V_τ. Задание полей квазитензоров $\{y^p\}, \{y^i\}$ определяет поле инвариантных нормалей первого рода E_{n-m} поверхности V_m^τ, а задание полей квазитензоров $\{y^p\}, \{y^\alpha\}$ определяет поле инвариантных нормалей первого рода E_{s+1} поверхности V^τ_{n-s-1}.

Рассмотрим гиперплоскость

$$\widetilde{\sigma}^0 = \tau^0 - x_p \tau^0 - x_i \tau^i - x_\alpha \tau^\alpha$$

такую, что плоскости $\Pi_{\tau-1} = [\widetilde{\sigma}^0, \tau^i, \tau^\alpha, \tau^n]$ и $\Pi_{n-2} = [\widetilde{\sigma}^0, \tau^n]$ инвариантны. Требование инвариантности этих плоскостей приводит к тому, что величины $\{x_p\}, \{x_i\}, \{x_\alpha\}$ удовлетворяют соответственно условиям (1.22), (1.23), (1.26). Причем задание полей квазитензоров $\{x_p\}, \{x_i\}, \{x_\alpha\}$ определяет поле инвариантных плоскостей $\Pi_{n-2} \equiv [\widetilde{\sigma}^0, \tau^n]$ и, следовательно, поле инвариантных нормалей второго рода $\Pi_{\tau-1}$ поверхности V_τ. Задание полей квазитензоров $\{x_p\}$ и $\{x_i\}$ определяет поле инвариантных нормалей второго рода Π_{m-1} поверхности V_m^τ, а задание полей квазитензоров $\{x_p\}$ и $\{x_\alpha\}$ определяет поле инвариантных нормалей второго рода Π_{n-s-2} поверхности V^τ_{n-s-1}.

Условие инцидентности точки $\overline{M}_n$ и гиперплоскости $\widetilde{\sigma}^0$ задается соотношением $(\overline{M}_n, \widetilde{\sigma}^0) = 0$, откуда

$$x_p y^p + x_i y^i + x_\alpha y^\alpha = 0. \qquad (1.28)$$

Уравнения (1.24), (1.25), (1.27) и уравнение

$$y^p \pi_p^0 + y^i \pi_i^0 + y^\alpha \pi_\alpha^0 - \pi_n^0 = 0 \qquad (1.29)$$

определяют инвариантность точки $\overline{M}_n$.

Аналогично уравнения (1.22), (1.23), (1.26) и уравнение

$$x_p \pi_n^p + x_i \pi_n^i + x_\alpha \pi_n^\alpha - \pi_n^0 = 0 \qquad (1.30)$$

определяют инвариантность гиперплоскости $\widetilde{\sigma}^0$.

Квазитензоры $\{x_p\}, \{x_i\}, \{x_\alpha\}, \{y^p\}, \{y^i\}, \{y^\alpha\}$ назовем оснащающими геометрическими объектами распадающейся гиперполосы RH_m^τ. Эти оснащающие объекты определяют соответственно точечный и тангенциальный реперы ($\{M_\mathcal{J}\}$ и $\{\sigma^\mathcal{J}\}$), присоединенные к гиперполосе RH_m^τ. Элементы этих реперов следующим образом выражаются через элементы исходных реперов:

$$\begin{aligned}
&M_0 \equiv A_0, && \widetilde{\sigma}^0 = \tau^0 - x_p \tau^p - x_\alpha \tau^\alpha - x_i \tau^i,\\
&M_p = A_p + x_p A_0, && \sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n,\\
&M_i = A_i + x_i A_0, && \sigma^i = \tau^i + y^i \tau^n,\\
&M_\alpha = A_\alpha + x_\alpha A_0, && \sigma^\alpha = \tau^\alpha + y^\alpha \tau^n,\\
&\overline{M}_n = A_n - y^p A_p - y^i A_i - y^\alpha A_\alpha; && \sigma^n \equiv \tau^n.
\end{aligned} \qquad (1.31)$$

§2. Построение внутреннего инвариантного репера распадающейся гиперполосы RH^r_m с помощью первой пары нормальных квазитензоров.

Докажем, что для фундаментального дифференциально геометрического объекта третьего порядка гиперполосы RH^r_m существуют алгебраические охваты, структура которых такая же, как и структура дифференциально геометрических оснащающих объектов данной гиперполосы RH^r_m.

В окрестности второго порядка элемента гиперполосы RH^r_m построим следующие величины:

$$\lambda_i = \frac{1}{r} a_{pq} b^{pq}_i, \quad (2.1) \qquad \lambda^i = \frac{1}{r} a^{pq} b^i_{pq}, \quad (2.2)$$

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{r} a_{pq} b^{pq}_\alpha, \quad (2.3) \qquad \lambda^\alpha = \frac{1}{r} a^{pq} b^\alpha_{pq}, \quad (2.4)$$

где

$$\nabla_\delta \lambda_i = -\lambda_i \pi^0_0 + \pi^0_i, \qquad (2.5)$$

$$\nabla_\delta \lambda^i = \lambda^i \pi^n_n - \pi^i_n, \qquad (2.6)$$

$$\nabla_\delta \lambda_\alpha = -\lambda_\alpha \pi^0_0 + \pi^0_\alpha, \qquad (2.7)$$

$$\nabla_\delta \lambda^\alpha = \lambda^\alpha \pi^n_n - \pi^\alpha_n. \qquad (2.8)$$

Сравнив уравнения (2.5)-(2.8) соответственно с уравнениями (1.23), (1.25)-(1.27), приходим к выводу, что уравнения (1.23), (1.25)-(1.27) удовлетворяются соответственно при

$$x_i = -\lambda_i; \; y^i = -\lambda^i; \; x_\alpha = -\lambda_\alpha, \; y^\alpha = -\lambda^\alpha.$$

Т е о р е м а 1. Инвариантные оснащающие плоскости
$E_{s-1} \equiv [M_i] = [A_i - \lambda_i A_0]$, $E_{n-s} \equiv [\sigma^i] = [\tau^i - \lambda^i \tau^n]$,
$E_{n+m+2} \equiv [M_\alpha] = [A_\alpha - \lambda_\alpha A_0]$, $E_{m+1} \equiv [\sigma^\alpha] = [\tau^\alpha - \lambda^\alpha \tau^n]$

внутренним образом присоединены к распадающейся гиперполосе RH^r_m и определяются в окрестности третьего порядка элемента данной гиперполосы RH^r_m.

Построим с помощью компонент фундаментального геометрического объекта третьего порядка гиперполосы RH^r_m охваты, структура которых такая же, как и структура оснащающих объектов x_p и y^p данной гиперполосы RH^r_m.

Составим величины:

$$d_p = \frac{1}{r+2} a_{pqt} a^{qt}, \quad (2.9) \qquad d^p = \frac{1}{r+2} a^{pqt} a_{qt}, \quad (2.10)$$

где

$$d^p = a^{pq} d_q, \qquad (2.11)$$

$$\nabla_\delta a_{pqt} = -a_{pqt}(2\pi^0_0 + \pi^n_n) - a_{(pq}\pi^0_{t)} + a_{(pq} a_{t)s} \pi^s_n, \qquad (2.12)$$

$$\nabla_\delta a^{pqt} = -a^{pqt}(\pi^0_0 + 2\pi^n_n) + a^{(pq}\pi^{t)}_n - a^{(pq} a^{t)s} \pi^0_s. \qquad (2.13)$$

Уравнения (2.12) и (2.13) получены из продолжения соответственно уравнений (1.15) и (1.21) при фиксированных главных параметрах. Ковариантно дифференцируя (2.9) и (2.10) и учитывая (1.15), (1.21), (2.12), (2.13), а затем фиксируя значения главных параметров, находим:

$$\nabla_\delta d_p = -d_p \pi^0_0 - \pi^0_p + a_{pq} \pi^q_n, \qquad (2.14)$$

$$\nabla_\delta d^p = d^p \pi^n_n + \pi^p_n - a^{pq} \pi^0_q \qquad (2.15)$$

Построим относительные тензоры:

$$l_{pqt} = a_{pqt} - a_{(pq} d_{t)}, \qquad (2.16)$$

$$l^{pqt} = a^{pqt} - a^{(pq} d^{t)}, \qquad (2.17)$$

связанные равенством

$$\ell^{pqt} = a^{sp} a^{fq} a^{gt} \ell_{sfg} \tag{2.18}$$

и удовлетворяющие условиям аполярности:

$$\ell_{pqt} a^{qt} = 0, \quad \ell^{pqt} a_{qt} = 0. \tag{2.19}$$

Используя соотношения (1.15),(1.21),(2.9),(2.10),(2.14),(2.15), находим:

$$\nabla_\delta \ell_{pqt} = -\ell_{pqt} (2\pi_0^0 + \pi_n^n), \tag{2.20}$$

$$\nabla_\delta \ell^{pqt} = \ell^{pqt} (\pi_0^0 + 2\pi_n^n). \tag{2.21}$$

Тензор ℓ_{pqt} является тензором Дарбу [1] базисной поверхности V_m^τ, а тензор ℓ^{pqt} —тензором Дарбу гиперповерхности V_{n-1}^τ, огибаемой главными касательными гиперплоскостями τ^n гиперполосы RH_m^τ. С помощью тензоров Дарбу строим относительный инвариант

$$\ell = \ell_{pqt} \ell^{pqt}. \tag{2.22}$$

Дальнейшее построение проводится в предположении, что $\ell \neq 0$ В общем случае можно считать, что $\ell \neq 0$, при $\ell_{pqt} \neq 0$ [3]. Имеем:

$$\delta \ln \ell = \pi_n^n - \pi_0^0.$$

Это уравнение при незафиксированных значениях главных параметров будет иметь вид:

$$d \ln \ell = \omega_n^n - \omega_0^0 + \ell_p \omega^p \tag{2.23}$$

или же

$$d \ln \ell = \omega_n^n - \omega_0^0 - \ell^p \omega_p^n, \tag{2.24}$$

где

$$\ell^p = a^{pq} \ell_q. \tag{2.25}$$

Наконец, определим оснащающие объекты $\{x_p\}$ и $\{y^p\}$ нужного строения:

$$\lambda_p = -\frac{1}{2}(d_p + \ell_p), \tag{2.26}$$

$$\lambda^p = -\frac{1}{2}(d^p + \ell^p), \tag{2.27}$$

где

$$\nabla_\delta \lambda_p = -\lambda_p \omega_0^0 + \omega_p^0 + \bar{\lambda}_p^q \omega_q^n, \tag{2.28}$$

$$\nabla_\delta \lambda^p = \lambda^p \omega_n^n - \omega_n^p - \tilde{\lambda}_q^p \omega^q. \tag{2.29}$$

Действительно, уравнения (I.22) и (I.24) удовлетворяются при $x_p = -\lambda_p$; $y^p = -\lambda^p$. Итак, имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Инвариантные нормали первого и второго рода гиперполосы RH_m^τ

$$E_{n-\tau} \equiv [\sigma^p] = [\tau^p - \lambda^p \tau^n] \quad \text{и} \quad E_{\tau-1} \equiv [M_p] = [A_p - \lambda_p A_0]$$

внутренним образом присоединены к данной гиперполосе и определяются в окрестности третьего порядка элемента данной гиперполосы.

Назовем квазитензоры третьего порядка λ^p и λ_p, задающие внутренние инвариантные нормали первого и второго рода гиперполосы RH_m^τ, первой парой нормальных квазитензоров данной гиперполосы. Построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы RH_m^τ, имеют следующий вид:

$$M_0 \equiv A_0, \qquad \bar{\sigma}^0 = \tau^0 + \lambda_\alpha \tau^\alpha + \lambda_i \tau^i + \lambda_p \tau^p,$$

$$M_p = A_p - \lambda_p A_0, \qquad \sigma^p = \tau^p - \lambda^p \tau^n,$$

$$M_i = A_i - \lambda_i A_o, \qquad \sigma^i = \tau^i - \lambda^i \tau^n,$$
$$M_\alpha = A_\alpha - \lambda_\alpha A_o, \qquad \sigma^\alpha = \tau^\alpha - \lambda^\alpha \tau^n,$$
$$\bar{M}_n = A_n + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^i A_i + \lambda^p A_p; \quad \sigma^n \equiv \tau^n.$$

§3. Поля геометрических объектов распадающейся гиперполосы RH^τ_m

I. Окрестность второго порядка.

В §2 построена система квазитензоров второго порядка (2.1)-(2.4), охватываемая фундаментальным объектом Γ_2 гиперполосы RH^τ_m. Продолжим построение полей геометрических объектов, определяемых в окрестности второго порядка исследуемой гиперполосы RH^τ_m. Имеем

$$c_i^{pq} = b_i^{pq} - \lambda_i a^{pq}, \quad (3.1) \qquad c^\alpha_{pq} = b^\alpha_{pq} - \lambda^\alpha a_{pq}, \quad (3.2)$$

$$c^i_{pq} = b^i_{pq} - \lambda^i a_{pq}, \quad (3.3) \qquad c^{pq}_\alpha = b^{pq}_\alpha - \lambda_\alpha a^{pq}, \quad (3.4)$$

где

$$\nabla_\delta c_i^{pq} = c_i^{pq} \pi^n_n, \quad (3.5) \qquad \nabla_\delta c^\alpha_{pq} = - c^\alpha_{pq} \pi^o_o, \quad (3.6)$$

$$\nabla_\delta c^i_{pq} = - c^i_{pq} \pi^o_o, \quad (3.7) \qquad \nabla_\delta c^{pq}_\alpha = c^{pq}_\alpha \pi^n_n. \quad (3.8)$$

Из равенств (3.5)-(3.8) следует, что величины c_i^{pq}, c^i_{pq}, c^α_{pq}, c^{pq}_α являются относительными тензорами второго порядка. Для этих тензоров выполняются условия аполярности:

$$c^i_{pq} a^{pq} = 0, \qquad c^\alpha_{pq} a^{pq} = 0,$$

$$c^{pq}_i a_{pq} = 0, \qquad c^{pq}_\alpha a_{pq} = 0.$$

Дальнейшие построения проводятся для распадающихся гиперполос RH^τ_m, которые допускают отличный от нуля инвариант $\mathcal{J} = \mathcal{J}(c_i^{pq}, c^\alpha_{pq})$. В общем случае, когда соприкасающаяся плоскость второго порядка заполняет все пространство, можно показать (аналогично, как это сделано в работе [7]), что к гиперполосе RH^τ_m присоединяются объекты второго порядка $\tilde{c}^i_{pq}$, $\tilde{c}^{pq}_\alpha$ — обращенные тензоры соответственно тензорам c_i^{pq}, $\tilde{c}^{pq}_\alpha$:

$$\tilde{c}^{pq}_\alpha c^\beta_{pq} = \tau \delta^\beta_\alpha; \quad \tilde{c}^{pq}_\alpha c^\alpha_{tq} = (n-m-1)\delta^p_t, \quad \tilde{c}^{pq}_\alpha c^\alpha_{pq} = \tau(n-m-1); \quad (3.9)$$

$$\tilde{c}^i_{pq} c^{pq}_j = \tau \delta^i_j, \quad \tilde{c}^i_{pq} c^{pt}_i = (m-\tau)\delta^t_q, \quad \tilde{c}^i_{pq} c^{pq}_i = \tau(m-\tau). \quad (3.10)$$

Имеем

$$\nabla \tilde{c}^{pq}_\alpha = c^{pq}_\alpha \omega^o_o - \tilde{c}^{pqt}_\alpha \omega^n_t, \quad (3.11)$$

$$\nabla \tilde{c}^i_{pq} = - \tilde{c}^i_{pq} \omega^n_n + \tilde{c}^i_{pqt} \omega^t. \quad (3.12)$$

Составим последовательно величины:

$$t^i_\alpha = \frac{1}{\tau} c^i_{pq} \tilde{c}^{pq}_\alpha, \quad (3.13)$$

$$\nabla_\delta t^i_\alpha = 0. \quad (3.14)$$

Используя компоненты геометрических объектов $\{c^i_{pq}, c^\alpha_{pq}\}$ $\{c^{pq}_\alpha, c^{pq}_i\}$ и двухвалентные основные тензоры a_{pq} и a^{pq}, построим следующие свертки:

$$l^p_{iq} = c^{ps}_i a_{sq}, \quad (3.15) \qquad l^{iq}_p = c^i_{ps} a^{sq}, \quad (3.16)$$

$$l^p_{\alpha q} = c^{ps}_\alpha a_{sq}, \quad (3.17) \qquad l^{\alpha q}_p = c^\alpha_{ps} a^{sq}, \quad (3.18)$$

$$\ell_i^j=\frac{1}{\tau}\,\ell^p_{iq}\,\ell^{jq}_p=c^{pq}_i\,c^j_{pq}, \qquad (3.19)$$

$$\ell^\alpha_i=\frac{1}{\tau}\,\ell^p_{iq}\,\ell^{\alpha q}_p=c^{ps}_i\,c^\alpha_{ps}, \qquad (3.20)$$

$$\ell^\beta_\alpha=\frac{1}{\tau}\,\ell^p_{\alpha q}\,\ell^{\beta q}_p=c^{ps}_\alpha\,c^\beta_{ps}, \qquad (3.21)$$

$$\ell_{ij}=\ell^p_{iq}\,\ell^q_{jp}, \quad (3.22) \qquad \ell^{\alpha\beta}=\ell^{\alpha q}_p\,\ell^{\beta p}_q, \qquad (3.23)$$

$$\ell_{i\alpha}=\ell^p_{iq}\,\ell^q_{\alpha p}, \quad (3.24) \qquad \ell^{\alpha i}=\ell^{\alpha q}_p\,\ell^{ip}_q, \qquad (3.25)$$

удовлетворяющие соответственно дифференциальным уравнениям:

$$\nabla\ell^p_{iq}=-\ell^p_{iq}\,\omega^0_0-\ell^{ps}_{iq}\,\omega^n_s, \qquad (3.26)$$

$$\nabla\ell^{iq}_p=\ell^{iq}_p\,\omega^n_n+\ell^{iq}_{ps}\,\omega^s, \qquad (3.27)$$

$$\nabla\ell^p_{\alpha q}=-\ell^p_{\alpha q}\,\omega^0_0-\ell^{ps}_{\alpha q}\,\omega^n_s, \qquad (3.28)$$

$$\nabla\ell^{\alpha q}_p=\ell^{\alpha q}_p\,\omega^n_n+\ell^{\alpha q}_{pt}\,\omega^t, \qquad (3.29)$$

$$\nabla\ell^j_i=\ell^j_i(\omega^n_n-\omega^0_0)+\ell^j_{it}\,\omega^t, \qquad (3.30)$$

$$\nabla\ell^\alpha_i=\ell^\alpha_i(\omega^n_n-\omega^0_0)+\ell^\alpha_{it}\,\omega^t, \qquad (3.31)$$

$$\nabla\ell^\beta_\alpha=\ell^\beta_\alpha(\omega^n_n-\omega^0_0)+\ell^\beta_{\alpha t}\,\omega^t, \qquad (3.32)$$

$$\nabla\ell_{ij}=-2\ell_{ij}\,\omega^0_0+\ell_{ijt}\,\omega^t, \qquad (3.33)$$

$$\nabla\ell^{\alpha\beta}=2\ell^{\alpha\beta}\,\omega^n_n+\ell^{\alpha\beta}_t\,\omega^t, \qquad (3.34)$$

$$\nabla\ell_{i\alpha}=-2\ell_{i\alpha}\,\omega^0_0+\ell_{i\alpha t}\,\omega^t, \qquad (3.35)$$

$$\nabla\ell^{\alpha i}=2\ell^{\alpha i}\,\omega^n_n+\ell^{\alpha i}_t\,\omega^t. \qquad (3.36)$$

Итак, построенные геометрические объекты $\ell^p_{iq}, \ell^{iq}_p, \ell^p_{\alpha q}, \ell^{\alpha q}_p, \ell^j_i, \ell^\alpha_i, \ell^\beta_\alpha, \ell_{ij}, \ell^{\alpha\beta}, \ell_{i\alpha}, \ell^{\alpha i}$ есть относительные тензоры второго порядка данной распадающейся гиперполосы RH^τ_m.

Построим еще один относительный тензор второго порядка Q^i_j:

$$\bar\ell^i_j=t^i_\alpha\cdot\ell^\alpha_j, \quad \nabla\bar\ell^i_j=\bar\ell^i_j(\omega^n_n-\omega^0_0)+\bar\ell^i_{jt}\,\omega^t,$$

$$Q^i_j=\bar\ell^i_j-\ell^i_j, \quad \nabla Q^i_j=Q^i_j(\omega^n_n-\omega^0_0)+Q^i_{jt}\,\omega^t. \qquad (3.37)$$

Можно показать аналогично, как это сделано в работе [3], что для распадающихся гиперполос RH^τ_m в общем случае при некоторых начальных условиях относительные тензоры ℓ_{ij}, ℓ^j_i, Q^j_i являются невырожденными. Итак, рассмотрим гиперполосы RH^τ_m, для которых тензоры второго порядка ℓ_{ij} и Q^i_j невырождены. Для тензора Q^j_i введем взаимный тензор $\widetilde{Q}^k_i$:

$$Q^j_k\,\widetilde{Q}^k_i=Q^k_i\,\widetilde{Q}^j_k=\delta^j_i, \quad \nabla_\delta\widetilde{Q}^k_i+\widetilde{Q}^k_i(\pi^n_n-\pi^0_0)=0, \qquad (3.38)$$

а с помощью тензора ℓ_{ij} определим симметрический тензор L_{ij}:

$$L_{ij}=-\frac{1}{2}(\widetilde{Q}^k_i\,\ell_{kj}+\widetilde{Q}^k_j\,\ell_{ki}), \quad \nabla_\delta L_{ij}=-L_{ij}(\pi^0_0+\pi^n_n). \qquad (3.39)$$

В общем случае тензор L_{ij} невырожденный, с его помощью строим следующие геометрические объекты второго порядка:

$$L_{i\alpha}=-L_{ij}\,t^j_\alpha, \quad \nabla L_{i\alpha}=-L_{i\alpha}(\omega^0_0+\omega^n_n)+L_{i\alpha t}\,\omega^t, \qquad (3.40)$$

$$L_{\alpha\beta}=-L_{i\alpha}\,t^i_\beta, \quad \nabla L_{\alpha\beta}=-(\omega^0_0+\omega^n_n)L_{\alpha\beta}+L_{\alpha\beta t}\,\omega^t. \qquad (3.41)$$

Положим:

$$\alpha_p = a^{tv} a^{fw} \ell_{vwp} (c^{\alpha}_{tf} \lambda_\alpha + c^{i}_{tf} \lambda_i), \qquad (3.42)$$

$$\beta_p = \ell_{vwp} (c^{vw}_i \lambda^i + c^{vw}_\alpha \lambda^\alpha). \qquad (3.43)$$

Величины α_p и β_p ,определяемые в окрестности второго порядка элемента гиперполосы RH^{τ}_m ,в силу уравнений (1.21),(2.5)-(2.8),(2.20),(3.5)-(3.8),удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_\delta \alpha_p = -\alpha_p (2\pi^o_o - \pi^n_n) + a^{tv} a^{fw} \ell_{vwp} c^{\alpha}_{tf} \pi^o_\alpha + $$
$$+ a^{tv} a^{fw} \ell_{vwp} c^{i}_{tf} \pi^o_i, \qquad (3.44)$$

$$\nabla_\delta \beta_p = -\beta_p (2\pi^o_o - \pi^n_n) - \ell_{vwp} c^{vw}_\alpha \pi^\alpha_n - \ell_{vwp} c^{vw}_i \pi^i_n. \qquad (3.45)$$

Используя тензор Дарбу ℓ_{pqt} ,строим симметрический тензор

$$L_{pq} = a^{tv} a^{fw} \ell_{ptf} \ell_{qvw}, \ \nabla L_{pq} = -2 L_{pq} \omega^o_o + L_{pqt} \omega^t. \qquad (3.46)$$

В общем случае тензор L_{pq} невырожденный,т.е.существует взаимный ему тензор L^{pq} :

$$L^{pt} L_{tq} = \delta^p_q; \ \nabla L^{pq} - 2 L^{pq} \omega^o_o = L^{pq}_t \omega^t. \qquad (3.47)$$

Далее,используя свертки величин ℓ^j_i и ℓ^β_α ,найдем относительный инвариант второго порядка K_o .Действительно, последовательно имеем

$$\ell^i_i = \tilde{\ell}_o, \quad \delta \tilde{\ell}_o = \tilde{\ell}_o (\pi^n_n - \pi^o_o), \qquad (3.48)$$

$$\ell^\alpha_\alpha = \bar{\ell}_o, \quad \delta \bar{\ell}_o = \bar{\ell}_o (\pi^n_n - \pi^o_o), \qquad (3.49)$$

$$K_o = \tilde{\ell}_o + \bar{\ell}_o, \quad dK_o = K_o (\omega^n_n - \omega^o_o) + K_{ot} \omega^t. \qquad (3.50)$$

Наконец,вводим в рассмотрение квазитензоры $\{\ell_i, L_{ij}, L_{i\alpha}\}$ и $\{\ell_\alpha, L_{i\alpha}, L_{\alpha\beta}\}$,где величины

$$\ell_i = L_{i\alpha} \lambda^\alpha - L_{ij} \lambda^j - \lambda_i; \ \ell_\alpha = -(L_{\alpha\beta} \lambda^\beta + L_{i\alpha} \lambda^i + \lambda_\alpha) \qquad (3.51)$$

удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla_\delta \ell_i = -\ell_i \pi^o_o + L_{ij} \pi^j_n + L_{i\alpha} \pi^\alpha_n - \pi^o_i, \qquad (3.52)$$

$$\nabla_\delta \ell_\alpha = -\ell_\alpha \pi^o_o + L_{i\alpha} \pi^i_n + L_{\alpha\beta} \pi^\beta_n - \pi^o_\alpha. \qquad (3.53)$$

II.Окрестность третьего порядка.

Построим систему величин,охваченных компонентами фундаментального дифференциально геометрического объекта третьего порядка Γ_3 гиперполосы RH^{τ}_m .

Продолжение уравнений (1.15),(2.9),(2.10) приводит соответственно к дифференциальным уравнениям:

$$\nabla a_{pqt} + a_{pqt} (2\omega^o_o + \omega^n_n) + a_{(pq} \omega^o_{t)} - a_{s(p} a_{qt)} \omega^s_n = a_{pqts} \omega^s, \qquad (3.54)$$

$$\nabla d_p + d_p \omega^o_o - a_{ps} \omega^s_n + \omega^o_p = d_{pt} \omega^t, \qquad (3.55)$$

$$\nabla d^p - d^p \omega^n_n + a^{pt} \omega^o_t - \omega^p_n = d^{pq} \omega^n_q, \qquad (3.56)$$

где,вообще говоря, $d_{pt} \neq d_{tp}$, $d^{pq} \neq d^{qp}$,а величины a_{pqts} симметричны по первым трем индексам p, q, t .

Системы величин $\{d_{pq}\}$ и $\{d^{pq}\}$ принадлежат окрестности третьего порядка элемента гиперполосы RH^{τ}_m и удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla_\delta d_{pq} + 2 d_{pq} \pi^o_o + d_{(p} \pi^o_{q)} - (a_{pqt} + a_{pq} d_t) \pi^t_n + 2 a_{pq} \pi^o_n +$$
$$+ b^i_{pq} \pi^o_i + b^\alpha_{pq} \pi^o_\alpha + a_{ps} a^s_{\alpha q} \pi^\alpha_n + a_{pt} a^t_{iq} \pi^i_n = 0, \qquad (3.57)$$

$$\nabla_\delta d^{pq}=2d^{pq}\pi^n_n+d^{(p}\pi^{q)}_n-(a^{pqt}+a^{pq}d^t)\pi^o_t+2a^{pq}\pi^o_n+$$

$$+b^{pq}_i\pi^i_n+b^{pq}_\alpha\pi^\alpha_n+a^{pt}a^{\alpha q}_t\pi^o_\alpha+a^{pt}a^{iq}_t\pi^o_i. \qquad (3.58)$$

При помощи этих величин $\{d_{pq}\}$ и $\{d^{pq}\}$ третьего порядка и уже построенных ранее величин второго порядка последовательно определяем новые величины третьего порядка $T, T_o, \hat{T}_{pq}, \hat{T}_p, T^p, K_p, \bar{T}$:

$$T=\frac{1}{\tau}(d_{pq}-d_p d_q)a^{pq}, \qquad (3.59)$$

$$T_o=T-\lambda^i\ell_i-\lambda^\alpha\ell_\alpha, \qquad (3.60)$$

$$\hat{T}_{pq}=d_{pq}-d_p d_q-T_o a_{pq}, \qquad (3.61)$$

$$\hat{T}_p=a^{vw}a^{tf}\hat{T}_{vt}\ell_{wfp}+(\alpha_p-\beta_p), \qquad (3.62)$$

$$T^p=L^{pq}\hat{T}_q, \qquad (3.63)$$

$$K_p=d_p-a_{pq}T^q, \qquad (3.64)$$

$$\bar{T}=\frac{1}{\tau}(d^{pq}-d^p d^q)a_{pq}, \qquad (3.65)$$

дифференциальные уравнения которых в силу (1.15),(1.21), (2.12)-(2.15),(2.20),(2.21),(3.44)-(3.47),(3.51)-(3.53), (3.56)-(3.58) имеют вид:

$$\delta T=T(\pi^n_n-\pi^o_o)+2d_p\pi^p_n-(2\pi^o_n+\lambda^\alpha\pi^o_\alpha+\lambda^i\pi^o_i+\lambda_\alpha\pi^\alpha_n+\lambda_i\pi^i_n), \qquad (3.66)$$

$$\delta T_o=T_o(\pi^n_n-\pi^o_o)+2(d_p\pi^p_n-\pi^o_n+\lambda_i\pi^i_n+\lambda_\alpha\pi^\alpha_n). \qquad (3.67)$$

$$\nabla_\delta T_{pq}+2\hat{T}_{pq}\pi^o_o-\ell_{pqt}\pi^t_n+c^i_{pq}\pi^o_i+c^\alpha_{pq}\pi^o_\alpha-\lambda_i a_{pq}\pi^i_n-$$

$$-\lambda_\alpha a_{pq}\pi^\alpha_n+a_{pt}a^t_{qi}\pi^i_n+a_{ps}a^s_{q\alpha}\pi^\alpha_n=0, \qquad (3.68)$$

$$\nabla_\delta\hat{T}_p+\hat{T}_p(2\pi^o_o-\pi^n_n)-L_{pq}\pi^q_n=0, \qquad (3.69)$$

$$\nabla_\delta T^p=T^p\pi^n_n+\pi^p_n, \qquad (3.70)$$

$$\nabla_\delta K_p=-K_p\pi^o_o-\pi^o_p, \qquad (3.71)$$

$$\delta\bar{T}=\bar{T}(\pi^n_n-\pi^o_o)+2\pi^o_n-2d^p\pi^o_p+\lambda_i\pi^i_n+\lambda_\alpha\pi^\alpha_n+\lambda^i\pi^o_i+\lambda^\alpha\pi^o_\alpha. \qquad (3.72)$$

Из уравнений (3.70) и (3.71) следует, что каждая из систем величин $\{T^p\}$ и $\{K_p\}$ образует квазитензор третьего порядка исследуемой гиперполосы RH^τ_m. Назовем квазитензоры T^p и K_p второй парой нормальных квазитензоров. Определим, используя нормальные квазитензоры, тензоры третьего порядка $T^p+\lambda^p$ и $K_p+\lambda^p$:

$$\nabla(T^p+\lambda^p)=(T^p+\lambda^p)\omega^n_n+(\ldots)_t\omega^t, \qquad (3.73)$$

$$\nabla(K_p+\lambda_p)=-(K_p+\lambda_p)\omega^o_o+(\ldots)_t\omega^t. \qquad (3.74)$$

и абсолютный инвариант

$$\bar{J}=\ell_{pqt}L^{qt}(T^p+\lambda^p), \qquad (3.75)$$

так как из (2.20),(3.46),(3.73) имеем $\delta\bar{J}=0$.

§4. Построение внутреннего инвариантного репера с помощью второй пары нормальных квазитензоров.

Рассмотрим построение внутреннего инвариантного репера $\{M_J\}$ распадающейся гиперполосы RH_m^τ, для которой тензор $\ell=0$ ($\ell_{pqt}\neq 0$). В этом случае оснащающие объекты $\{y^p\}$ и $\{x_p\}$ можно охватить второй парой нормальных квазитензоров T^p, K_p третьего порядка, а охваты остальных оснащающих объектов $x_i, x_\alpha, y^i, y^\alpha$ оставить теми же, что и в §2. В нормали первого рода $E_{n-\tau}$ поверхности V_τ определим инвариантную оснащающую плоскость $N_{n-\tau-1}\equiv[\mathcal{K}, M_i, M_\alpha]$, где

$$K=\rho^\circ A_\circ - T^p A_p + \lambda^i A_i + \lambda^\alpha A_\alpha + A_n. \quad (4.1)$$

Требование инвариантности плоскости $N_{n-\tau-1}$ приводит к уравнению

$$\delta\rho^\circ=\rho^\circ(\pi_n^n-\pi_\circ^\circ)+T^p\pi_p^\circ-\lambda^i\pi_i^\circ-\lambda^\alpha\pi_\alpha^\circ-\pi_n^\circ. \quad (4.2)$$

Инвариантная точка K является точкой пересечения оснащающей плоскости $N_{n-\tau-1}$ с инвариантной прямой $h\equiv[A_\circ, \bar{M}_n]$. Аналогично рассмотрим инвариантную гиперплоскость

$$\nu^\circ=\tau^\circ-K_p\tau^p+\lambda_i\tau^i+\lambda_\alpha\tau^\alpha+\theta\tau^n, \quad (4.3)$$

где

$$\delta\theta=\theta(\pi_n^n-\pi_\circ^\circ)-K_p\pi_n^p+\lambda_i\pi_n^i+\lambda_\alpha\pi_n^\alpha+\pi_n^\circ. \quad (4.4)$$

Инцидентность точки K и гиперплоскости ν° задается соотношением $(K,\nu^\circ)=0$ или

$$\theta+\rho^\circ+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha=0. \quad (4.5)$$

Нетрудно убедиться, что величины

$$N=\tfrac{1}{2}[T-\lambda^\alpha\lambda_\alpha-\lambda_i\lambda^i-(2d_p-a_{pq}T^q)T^p] \quad (4.6)$$

$$S=\tfrac{1}{2}[\bar{T}-\lambda_i\lambda^i-\lambda_\alpha\lambda^\alpha-(2d^p-a^{pq}K_q)K_p] \quad (4.7)$$

удовлетворяют соответственно уравнениям (4.2) и (4.4), если положить $\rho^\circ=N$, $\theta=S$.

Таким образом, точка

$$K=NA_\circ-T^pA_p+\lambda^iA_i+\lambda^\alpha A_\alpha+A_n \quad (4.8)$$

и гиперплоскость

$$\nu^\circ=\tau^\circ-K_p\tau^p+\lambda_i\tau^i+\lambda_\alpha\tau^\alpha+S\tau^n \quad (4.9)$$

внутренним инвариантным образом присоединены к гиперполосе RH_m^τ в окрестности третьего порядка элемента данной гиперполосы. При этом условие инцидентности (4.5) точки K и гиперплоскости ν° не выполняется. Однако можно выделить на прямой $[A_\circ K]$ инвариантную точку

$$\bar{K}=A_n-T^pA_p+\lambda^iA_i+\lambda^\alpha A_\alpha-(S+T^pK_p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha)A_\circ, \quad (4.10)$$

внутренним образом присоединенную к гиперполосе RH_m^τ и инцидентную гиперплоскости ν°, а в пучке гиперплоскостей $[\nu^\circ, \sigma^n]$ — внутреннюю инвариантную гиперплоскость

$$\bar{\nu}_\circ=\tau^\circ-K_p\tau^p+\lambda_i\tau^i+\lambda_\alpha\tau^\alpha-(N+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha)\tau^n, \quad (4.11)$$

инцидентную точке K.

Величины

$$\lambda_n=\frac{\alpha\bar{S}+\beta S}{\alpha+\beta}, \quad \lambda^\circ=\frac{\alpha N+\beta\bar{N}}{\alpha+\beta}, \quad (4.12)$$

где

$$\bar{S}=-(N+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha), \quad \bar{N}=-(S+K_pT^p+\lambda_i\lambda^i+\lambda_\alpha\lambda^\alpha),$$

3 Зак. 15465

а α и β —произвольные действительные числа, удовлетворяющие, соответственно, уравнениям (4.4) и (4.2). Таким образом, точка

$$M_n = A_n - T^p A_p + \lambda^i A_i + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^0 A_0 \qquad (4.13)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0 = \tau^0 - K_p \tau^p + \lambda_i \tau^i + \lambda_\alpha \tau^\alpha + \lambda_n \tau^n, \qquad (4.14)$$

внутренним инвариантным образом присоединены к гиперполосе RH^τ_m в окрестности третьего порядка ее плоского элемента и удовлетворяют условию инцидентности (4.5).

Построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка элемента гиперполосы RH^τ_m, имеют следующий вид:

$$M_0 \equiv A_0, \qquad \sigma^0 = \tau^0 - K_p \tau^p + \lambda_i \tau^i + \lambda_\alpha \tau^\alpha + \lambda_n \tau^n,$$
$$M_p = A_p + K_p A_0, \qquad \sigma^p = \tau^p + T^p \tau^n,$$
$$M_i = A_i - \lambda_i A_0, \qquad \sigma^i = \tau^i - \lambda^i \tau^n,$$
$$M_\alpha = A_\alpha - \lambda_\alpha A_0, \qquad \sigma^\alpha = \tau^\alpha - \lambda^\alpha \tau^n,$$
$$M_n = A_n - T^p A_p + \lambda^i A_i + \lambda^\alpha A_\alpha + \lambda^0 A_0, \qquad \sigma^n \equiv \tau^n.$$

§5. Геометрическая интерпретация оснащающих объектов распадающейся гиперполосы

Для выяснения геометрического смысла некоторых элементов внутреннего оснащения, построенного в §2 и §4, рассмотрим фокальные образы [8], связанные с распадающейся гиперполосой RH^τ_m.

Проведя совершенно аналогичные рассуждения, как и в работах [2],[3], приходим к следующим результатам:

Т е о р е м а 3. Внутренняя оснащающая плоскость E_{s-1}, принадлежащая плоской образующей $E_s \subset V^\tau_m$, является гармонической полярой [9] точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det \| x^i b^{pt}_i a_{qt} + x^0 \delta^p_q \| = 0; \; x^p = x^\alpha = x^n = 0, \qquad (5.1)$$

принадлежащей плоской образующей E_s гиперполосы RH^τ_m.

Внутренняя оснащающая плоскость $E_{n-s} \equiv [\sigma^i]$, проходящая через касательную плоскость T_{n-s-1} поверхности V_{n-s-1}, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathcal{K}_\tau$:

$$\det \| y_n \delta^t_p + y_i a^{it}_p \| = 0; \; y_\alpha = y_n = y_0 = 0, \qquad (5.2)$$

вершиной которого является плоскость T_{n-s-1}.

Т е о р е м а 4. Внутренняя инвариантная плоскость $\Pi_{n-\tau-2} = [M_i, M_\alpha]$ является гармонической полярой точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det \| x^0 \delta^q_p + x^i a^q_{ip} + x^\alpha a^q_{\alpha p} \| = 0; \; x^p = x^n = 0, \qquad (5.3)$$

которая принадлежит плоской образующей $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^τ_{n-1} (плоскость $E_{n-\tau-1}$ является характеристикой гиперполосы RH^τ_m).

Инвариантная плоскость $E_{\tau+1} \equiv [\sigma^i, \sigma^\alpha]$, внутренним образом присоединенная к распадающейся гиперполосе RH^τ_m и проходящая через касательную плоскость $T_\tau \subset V_\tau$, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathcal{K}_\tau$:

$$\det \| y_n \delta^p_q + a^{\alpha p}_q y_\alpha + a^{ip}_q y_i \| = 0; \; y_p = y_0 = 0, \qquad (5.4)$$

вершиной которого является касательная плоскость $T_\tau \subset V_\tau$.

Теорема 5. Внутренняя инвариантная плоскость $\Pi_{n-m-2} = [M_\alpha]$, принадлежащая образующей $E_{n-m-1} \equiv [A_0, M_\alpha]$ поверхности V^τ_{n-s-1}, является гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det \| x^0 \delta^p_q + x^\alpha b^{pt}_\alpha a_{qt} \| = 0; \quad x^p = x^i = x^n = 0, \qquad (5.5)$$

которая принадлежит плоскости $E_{n-m-1} \subset V^\tau_{n-s-1}$; внутренняя инвариантная плоскость $E_{m+1} = [\sigma^\alpha]$ является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathcal{Q}_\tau$:

$$\det \| y_n \delta^p_q + a^{\alpha p}_q y_\alpha \| = 0; \quad y_p = y_i = y_0 = 0, \qquad (5.6)$$

вершиной которого является плоскость $E_m = [\sigma^\alpha, \tau^n]$.

II. По аналогии с работами [10], [11], гиперквадрику Q_{n-1}, касающуюся гиперплоскости τ^n в точке A, назовем соприкасающейся гиперквадрикой гиперполосы $RH^\tau_m \subset P_n$, если она имеет касание 2-го порядка с базисной поверхностью V^τ_m данной гиперполосы (Q_{n-1} имеет тангенциальное касание 2-го порядка с тангенциально вырожденной гиперповерхностью V^τ_{n-1} гиперполосы RH^τ_m).

Проведя аналогичные рассуждения, что и в работе [3] §5, приходим к выводу: в дифференциальной окрестности третьего порядка элемента распадающейся гиперполосы $RH^\tau_m \subset P_n$ определена двупараметрическая связка внутренне инвариантно присоединенных к гиперполосе полей соприкасающихся гиперквадрик, дифференциальные уравнения которых в точечном репере (4.15) записываются в виде:

$$a_{pq} x^p x^q + L_{ij} x^i x^j + L_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2 L_{i\alpha} x^i x^\alpha + 2 l_i x^i x^n +$$
$$+ 2 l_\alpha x^\alpha x^n + 2 d_p x^p x^n + (T_0 + u_1 K_0 + u_2 l_0)(x^n)^2 = 2 x^0 x^n, \qquad (5.7)$$

где u_1 и u_2 – инвариантные параметры.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геоммтрия погруженных многообразий. – "Труды Моск. матем. о-ва", 1953, т.2, с.275-382.

2. Попов Ю.И., Мишенина Т.И. Инвариантное оснащение распадающейся (n-2)-мерной гиперполосы CH^τ_{n-2} ранга τ многомерного проективного пространства. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.5. Калининград, 1974, с.103-130.

3. Попов Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H^τ_m ранга τ многомерного проективного пространства. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6. Калининград, 1975, с.102-142.

4. Попов Ю.И. Аффинные связности вырожденных гиперполос. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7. Калининград, 1976, с.79-85.

5. Вагнер В.В. Теория поля локальных гиперполос. – В кн.: Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. Вып.8, 1950, с.97-272.

6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., 1950.

7. Остиану Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. – "Труды геом. семин. ВИНИТИ", М., 1966, т.1, с.239-263.

8. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга. – "Изв. высш. учебн. заведений. Математика", №1, 1957, с.9-19.

9. Casanova G. La nation de pôle harmonique. Rev. math. spéc., 1955, t.65, №6, s.437-440.

10. Столяров А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. "Изв. высш. учебн. заведений. Математика", №10, 1957, с. 97-99.

11. Олоничев П.И. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполосы. ДАН СССР, т. 80, №2, 1951, с. 165-168.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 8 1977

УДК 513.73

Е.В.Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ТОЧКОЙ

В трехмерном проективном пространстве продолжается изучение вырожденных [1] конгруэнций $(CP)_{1,2}$, порожденных кривой второго порядка (коникой) C и точкой P, в которых многообразие коник C -однопараметрическое, а многообразие точек P -двупараметрическое [2].

Изучены некоторые новые свойства расслояемых конгруэнций $(CP)_{1,2}$.

Вырожденные конгруэнции $(CP)_{1,2}$ характеризуются взаимно неоднозначным отображением, которое каждой точке P поверхности (P) ставит в соответствие единственную конику C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линия Γ_C на поверхности (P).

Отнесем конгруэнцию $(CP)_{1,2}$ к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершина A_4 совпадает с точкой P, вершины A_1 и A_2 являются точками пересечения касательной плоскости к поверхности (P) с коникой C, а A_3 -полюс прямой A_1A_2 относительно коники C.

Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений кон-