УДК 514.75

Г.В. Кузнецов

(Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого)

О ВЕКТОРАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^n

Рассматривается дифференцируемое отображение между двумя областями евклидова пространства E^n. В первой области определяется гиперраспределение, связанный с ним репер второго порядка, а также принадлежащие ему вектора второго порядка. Свойства гиперраспределений изучаются в зависимости от свойств векторов второго порядка.

Пусть точка $x \in \Omega \subset E^n$, где Ω - область в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Каждой точке x поставим в соответствие точку $y = f(x) \in \overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega}$ - также область в E^n. Присоединим к точке x множество всех аффинных реперов $(x, \mathbf{e}_i)$, $i = 1,\ldots,n$, с началом в этой точке. Положим $\mathbf{a}_i = f^*_x(\mathbf{e}_i)$, где f^*_x – касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f^*_x – невырожденное отображение, то векторы $\mathbf{a}_i$ независимы и образуют репер с началом в точке y. Уравнения перемещения реперов $(x, \mathbf{e}_i)$ и $(y, \mathbf{a}_i)$ запишем в виде:

$$d\boldsymbol{x} = \omega^i \mathbf{e_i}, \quad d\mathbf{e_i} = \omega^j_i \mathbf{e}_j,$$
$$d\mathbf{y} = \varpi^i \mathbf{a_i}, \quad d\mathbf{a_i} = \varpi^j_i \mathbf{a_j}. \tag{1}$$

1-формы, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k, \quad D\varpi^i = \varpi^j \wedge \varpi^i_j, \quad D\varpi^i_j = \varpi^k_j \wedge \varpi^i_k . \tag{2}$$

Обозначим через $g_{ij} = (\mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j)$ и $\overline{g}_{ij} = (\mathbf{a}_i\, \mathbf{a_j})$ - метрические тензоры в точках x и y соответственно. В силу согласованного выбора реперов в точках x и y 1-формы ω^i и ϖ^i, определяющие перемещение этих точек, связаны равенствами:

$$\varpi^i = \omega^i \tag{3}$$

Дифференцируя (3) внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\varpi^i_j - \omega^i_j = h^i_{jk}\, \omega^k , \tag{4}$$

где $h^i_{jk} = h^i_{kj}$- симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии f.

Присоединим к точке x репер так, чтобы вектор $\mathbf{e_n}$ принадлежал прямой (xy), а вектора $\mathbf{e}_a$ $(a = 1,\ldots,n\text{-}1)$ были ему ортогональны. Тем самым в каждой точке $x \in \Omega$ будет определена гиперплоскость $\Delta^{n-1}(x)$, ортогональная прямой (xy), а в области Ω будет задано гиперраспределение Δ^{n-1}.

Множество путей, ортогональных полю $\mathbf{e}_n$, назовем неголономным многообразием [1], которое в рассматриваемом случае будет гиперраспределением Δ^{n-1}.

Дифференциальные уравнения гиперраспределения Δ^{n-1} имеют вид:

$$\omega^n_a = \Lambda_{ab}\,\omega^b + \Lambda_a\,\omega^n\,. \qquad (5)$$

Тогда из уравнений (1) имеем: $d\mathbf{e}_a = \omega^b_a\,\mathbf{e}_b + \omega^n_a\,\mathbf{e}_n$. Или, по аналогии с [2],

$$d\mathbf{e}_a - \omega^b_a\mathbf{e}_b = \omega^n_a\mathbf{e}_n = \Lambda_{ab}\,\omega^b\,\mathbf{e}_n + \Lambda_a\,\omega^n\,\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{ab}\,\omega^b + \mathbf{e}_{an}\,\omega^n,$$

где $\mathbf{e}_{ab} = \Lambda_{ab}\,\mathbf{e}_\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{an}} = \Lambda_a\mathbf{e}_n$, причем $\mathbf{e}_{ab} \neq \mathbf{e}_{\mathbf{ba}}$.

Для всякой кривой, принадлежащей гиперраспределению Δ^{n-1}, вектора $d\mathbf{x}$ и $d^2\mathbf{x}$ определяют соприкасающуюся плоскость, которая задается векторами $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}_{ab}$. Положим $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \rho\mathbf{e}_n$. Дифференцируя последнее равенство, найдем:

$$\mathbf{a}_a = (\delta^b_a - \rho\Lambda^b_a)\mathbf{e}_b + \rho_a\,\mathbf{e}_n\,, \qquad \mathbf{a}_n = -\,\rho\Lambda^a\mathbf{e}_a + (1+\rho_n)\mathbf{e}_n\,, \qquad (6)$$

где $\Lambda^a_b = g^{ac}\Lambda_{cb}$, $\Lambda^a = g^{ab}\Lambda_b$, $d\rho = \rho_a\omega^a + \rho_n\omega^n$.

Из равенств (1), имеем: $d\mathbf{a}_a = \varpi^b_a\,\mathbf{a}_b + \varpi^n_a\,\mathbf{a}_n$. С учетом того, что при отображении f^* гиперраспределению Δ^{n-1} соответствует гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$, заданное в области $\overline{\Omega}$. Дифференциальные уравнения гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$ имеют, с учетом (3), вид: $\varpi^n_a = \overline{\Lambda}_{ab}\omega^b + \overline{\Lambda}_a\,\omega^n$. Тогда

$$d\mathbf{a}_a - \varpi^b_a\,\mathbf{a}_b = \varpi^n_a\,\mathbf{a}_n = (\overline{\Lambda}_{ab}\mathbf{a}_n)\omega^b + (\overline{\Lambda}_a\mathbf{a}_n)\omega^n = \mathbf{a}_{ab}\,\omega^b + \mathbf{a}_{an}\,\omega^n,$$

где $\mathbf{a}_{ab} = \overline{\Lambda}_{ab}\,\mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}_{an} = \overline{\Lambda}_a\,\mathbf{a}_n$, причем $\mathbf{a}_{ab} \neq \mathbf{a}_{ba}$.

Из (4) получаем $\varpi^n_a = \omega^n_a + h^n_{ab}\omega^b + h^n_{an}\omega^n$ или $\overline{\Lambda}_{ab} = \Lambda_{ab} + h^n_{ab}$, то вполне интегрируемому гиперраспределению Δ^{n-1} соответствует в отображении f также вполне интегрируемое гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$. Для вполне интегрируемых гиперраспределений $\mathbf{e}_{ab} = \mathbf{e}_{ba}$ и $\mathbf{a}_{ab} = \mathbf{a}_{ba}$. Тем самым, понятия вполне интегрируемого и не вполне интегрируемого гиперраспределений, можно трактовать как голономное и неголономное гладкие многообразия, рассматриваемые в [3, 4].

Рассмотрим единичное векторное поле $\mathbf{e}_n$, ортогональное гиперраспределению Δ^{n-1}. Ввиду того, что $\omega^n_n = 0$, то по аналогии, как было сделано выше, запишем:

$$d\mathbf{e}_n = (-\,g^{ab}\Lambda_{bc}\,\mathbf{e}_a)\,\omega^c + (-\,g^{ab}\Lambda_b\mathbf{e}_a)\,\omega^n = \mathbf{e}_{nc}\,\omega^c + \mathbf{e}_{nn}\,\omega^n,$$

где векторы $\mathbf{e}_{nc}$ и $\mathbf{e}_{nn}$ принадлежат касательному пространству второго порядка T^2 к интегральной линии векторного поля $\mathbf{e}_\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_{nc} = -\,g^{ab}\Lambda_{bc}\,\mathbf{e}_a = -\,\Lambda^a_c\,\mathbf{e}_a$, $\mathbf{e}_{nn} = -\,g^{ab}\Lambda_b\,\mathbf{e}_a$ =

$= -\,\Lambda^a\,\mathbf{e}_a$.

Векторы $\mathbf{e}_{ij}$ образуют вместе с $\mathbf{e}_i$ репер второго порядка, связанный с точкой x области Ω. Поэтому векторы $\mathbf{e}_{ij}$ назовем векторами второго порядка.

Рассмотрим скалярные произведения

$$\mathbf{e}_{na}\cdot\,\mathbf{e}_b = -\,\Lambda_{ba}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{nn}}\cdot\mathbf{e}_\mathbf{a} = -\,\Lambda_a\,. \qquad (7)$$

С учетом (7) дифференциальные уравнения гиперраспределения Δ^{n-1} примут вид:

$$\omega^n_a = -\,(\mathbf{e}_{nb}\,\mathbf{e}_a)\,\omega^b - (\mathbf{e}_{nn}\,\mathbf{e}_a)\,\omega^n. \qquad (8)$$

Как видно из (8), дифференциальные уравнения гиперраспределения Δ^{n-1} выражаются через скалярные произведения векторов, принадлежащих касательным пространствам 1-го T^1 и 2-го порядка T^2. Исходя из этого, найдем условия ортогональности векторов, принадлежащих T^2 и T^1. Из (7) получаем: $\mathbf{e}_{na}\mathbf{e}_b = 0$, а это будет тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ba} = 0$.

Равенство нулю основного тензора гиперраспределения возможно тогда и только тогда, когда оно является одновременно вполне интегрируемым и плоским [5], т. е. будет представлять собой 1-параметрическое семейство гиперплоскостей.

Теорема 1. *Вектора $\mathbf{e}_{na}$ и $\mathbf{e}_b$ ортогональны тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ^{n-1} является одновременно плоским и вполне интегрируемым.*

Из второго равенства (7) видим, что $\mathbf{e}_{nn}\mathbf{e_a} = 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_a = 0$. Для раскрытия геометрической характеристики последнего равенства, возьмем в качестве интегральных линий векторного поля $\mathbf{e}_n$ – прямые. Интегральные линии векторного поля $\mathbf{e}_n$ будут прямыми тогда и только тогда, когда $d\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ (mod $\omega^a = 0$), т. е. $d\mathbf{e}_n = - g^{ab}\Lambda_b\, \omega^n\, \mathbf{e}_a$ (mod $\omega^a = 0$).

Ввиду невырожденности тензора g^{ij} получаем, что интегральные линии $\mathbf{e}_n$ являются прямыми тогда и только тогда, когда $\Lambda_b = 0$.

Теорема 2. *Вектора $\mathbf{e}_{nn}$ и $\mathbf{e_a}$ ортогональны тогда и только тогда, когда интегральные линии векторного поля $\mathbf{e}_n$ являются прямыми.*

Как видно из (7), гиперраспределение Δ^{n-1} является :

1) вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_{na}\mathbf{e_b} = \mathbf{e}_{nb}\mathbf{e_a}$;

2) плоским тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_{na}\mathbf{e_b} = - \mathbf{e}_{nb}\mathbf{e_a}$;

3) сферическим тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_{na}\mathbf{e}_b = \mu g_{ab}$, где $\mu \in R$.

Для сферического гиперраспределения интегральные линии векторного поля являются прямыми.

Теорема 3. *Для сферического гиперраспределения вектора $\mathbf{e}_{nn}$ и $\mathbf{e}_a$ ортогональны.*

Выразим вектора $\mathbf{a}_{ab}$ и $\mathbf{a}_{an}$, принадлежащие $\overline{T}^2$, где $\overline{T}^2$ – касательное пространство 2-го порядка к $\overline{\Omega}$. Так как $\overline{\Lambda}_{ab} = \Lambda_{ab} + h^n{}_{ab}$, то после умножения этих равенств на вектор $\mathbf{a}_n$, получим:

$$\mathbf{a}_{ab} = - (\rho\Lambda^c\Lambda_{ab} + \rho\Lambda^c h^n{}_{ab})\mathbf{e_c} + (1 + \rho_n)\mathbf{h}_{ab} + (1 + \rho_n)\mathbf{e}_{ab},$$

где $\mathbf{h}_{ab} = h^n{}_{ab}\mathbf{e}_n$. Аналогично найдем

$$\mathbf{a}_{an} = - \rho(\Lambda_a\Lambda^b + h^n{}_{an}\Lambda^b)\mathbf{e}_b + (1 + \rho_n)\mathbf{h}_a + (1 + \rho_n)\mathbf{e}_{an},$$

где $\mathbf{h}_a = h^n{}_{an}\mathbf{e}_n$. Тем самым касательное пространство второго порядка в точке y $\in\overline{\Omega}$, определяется через касательное пространство второго порядка в точке x $\in\Omega$. Можно записать, что $\overline{T}^2 = f^{**}{}_x(T^2)$, где $f^{**}{}_x$- касательное линейное отображение к отображению $f^*{}_x$ в точке x. Вектора $\mathbf{a}_{ab}$ и $\mathbf{a}_{an}$ образуют вместе с $\mathbf{a}_a$ репер второго порядка. В случае, когда гиперраспределение Δ^{n-1} является одновременно плоским и вполне интегрируемым, то вектора $\mathbf{a}_{ab}$ будут зависеть только от векторов, принадлежащих касательному к Ω пространству 1-го порядка T^1.

Библиографический список

1. *Аминов Ю.А.* Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.

2. *Акивис М.А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 83 с.

3. *Шевченко Ю.И.* Примеры неголономных гладких многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1998. Вып. 29. С. 91-101.

4. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. 82 с.

5. *Акивис М.А.* О плоских гиперраспределениях в P^n // Мат. заметки. 1984. Т.36. Вып. 2. С. 213 – 222.

G.V. K u z n e t s o v

ABOUT VECTORS OF THE SECOND ORDER AND HYPERDISTRIBUTION IN A EUCLIDEAN SPACE E^n

In the given work the differentiable mapping between two areas of Euclidean space E^n is considered. In the first area is defined hyperdistribution, the frame of the second order, and also inhering to it of a vector of the second order is set. The properties hyperdistributions are considered in an association from properties of vectors of the second order.

УДК 514.75

И.А. К у з я к и н а

(Калининградский государственный университет)

ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ V_n ПРОСТРАНСТВА K_{n+1}

Рассматривается гиперповерхность V_n (n+1)-мерного проективного пространства с вырожденным абсолютом - пространства K_{n+1}. В репере 1-го порядка дано задание гиперповерхности V_n . Доказана теорема существования гиперповерхности $V_n \subset K_{n+1}$. Построены поля прямых, внутренним образом присоединенные к гиперповерхности V_n в дифференциальных окрестностях 3-го и 4-го порядков. К гиперповерхности V_n присоединены инвариантные точечный $\{M_J\}$и тангенциальный $\{\sigma^K\}$ реперы, двойственные друг другу.

Пространством n+1 измерений с проективной метрикой, или пространством K_{n+1}, называется такое пространство, образом точки которого является точка проективного пространства P_{n+1}, а фундаментальной группой - подгруппа проективных преобразований, сохраняющих некоторый поляритет. Этот поляритет называется абсолютным поляритетом пространства K_{n+1}. Аналогичные вопросы для трехмерного пространства рассмотрены Р.Г. Бухаревым [1] и И.Н. Мигалевой [2]. Известно [3], что число параметров группы движений пространства K_{n+1} равно $S = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} + \dfrac{(\delta+1)(\delta+2)}{2}$, где δ - дефект поляритета.

Придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$\overline{J}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0, n+1}$; $J, K, L = \overline{1, n+1}$; $i, j, k = \overline{1, n-1}$; $a, b, c = \overline{1, n}$.