УДК 551.46.45

А. А. Зайцев, А. И. Руденко, С. М. Алексеева

К ТЕОРИИ БАРОТРОПНЫХ ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрены баротропные геострофические течения в декартовых и полярных координатах. Отмечено, что использование полярных координат для анализа геострофических течений предпочтительней, поскольку этим течениям присуща радиальная симметрия. Получены соотношения между основными гидродинамическими характеристиками. Среди них наиболее важными являются выражения компонент скорости геострофического течения через давление. Выполнена процедура вывода уравнения завихренности через давление. Установлено, что в стационарных баротропных геострофических течениях изобаты совпадают с линиями тока. Детально изучено радиально-симметричное геострофическое течение.

In this article, we examine barotropic geostrophic currents in a Cartesian and the polar coordinate system. The polar system is preferable for analysing geostrophic currents, since radial symmetry is intrinsic to these currents. We obtained ratios between the general hydrodynamic properties. The expressions of geostrophic current velocity components in terms of pressure were the most important among them. The procedure of deriving the expression of vorticity in terms of pressure was carried out. We determined that isobaths coincided with streamlines in stationary barotropic geostrophic currents. The radially symmetrical geostrophic current was studied in detail.

Ключевые слова: антициклон, баротропные течения, завихренность, линии тока, антициклон.

Keywords*:* anticyclone, barotropic currents, vorticity, streamlines, anticyclone.

Введение

К важнейшим вихревым течениям относят геострофические, поскольку они, наряду с бароклинными геострофическими течениями [2], активно влияют на погоду и климат нашей планеты [1].

Мы руководствовались следующим планом изложения теории баротропных геострофических течений: сначала записываются уравнения стационарных течений в декартовых координатах, а затем — в полярных координатах. Использование полярных координат для анализа геострофических течений предпочтительней, поскольку этим течениям присуща радиальная симметрия. Добавим, что нами используется двумерная модель, то есть фактически мы считаем баротропные гео-

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. № 2. С. 39 – 46.

строфические течения плоскопараллельными. Жидкость считается несжимаемой, поэтому используемая математическая модель содержит уравнение несжимаемости.

1. Уравнения стационарных баротропных геострофических течений

Уравнения стационарных баротропных геострофических течений в декартовых координатах имеют вид:

$$-\rho f v + p_x = 0, \ \rho f u + p_y = 0, \tag{1}$$

$$u_x + v_y = 0.$$

Здесь f — параметр Кориолиса; x и y — декартовы координаты; u и v — зональная и меридиональная компоненты скорости частиц жидкости соответственно.

Уравнения стационарных баротропных геострофических течений в полярных координатах следующие:

$$-\rho f v + p_r = 0, \ \rho f u + \frac{1}{r} p_\varphi = 0, \tag{2}$$

$$u_r + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} v_\varphi = 0,$$

где r и φ — полярные координаты; u и v — радиальная и тангенциальная компоненты скорости частиц жидкости соответственно.

2. Характеристики стационарных баротропных геострофических течений

Перечислим важнейшие характеристики стационарных баротропных геострофических течений и дадим их определение.

1. Завихренность.

Завихренность в декартовых координатах:

$$\omega = v_x - u_y. \tag{3}$$

Завихренность в полярных координатах:

$$\omega = v_r + \frac{1}{r} v - \frac{1}{r} u_\varphi. \tag{4}$$

2. Функция тока.

Функция тока в декартовых координатах:

$$u = \psi_y, \ v = -\psi_x. \tag{5}$$

Функция тока в полярных координатах:

$$u = \frac{1}{r}\psi_\varphi, \ v = -\psi_r.$$

З а м е ч а н и е 1. Благодаря функции тока уравнение несжимаемости удовлетворяется автоматически.

В декартовых координатах это очевидно. Проверим справедливость высказывания для полярных координат.

$$u_r + \frac{1}{r}u + \frac{1}{r}v_\varphi = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{r}\psi_\varphi \\ v = -\psi_r \end{matrix} \right| = \left(\frac{1}{r}\psi_\varphi\right)_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\psi_\varphi\right) + \frac{1}{r}\left(-\psi_r\right)_\varphi =$$

$$= -\frac{1}{r^2}\psi_\varphi + \frac{1}{r}\psi_{\varphi r} + \frac{1}{r^2}\psi_\varphi - \frac{1}{r}\psi_{r\varphi} = 0.$$

Проверка подтвердила справедливость высказывания

$$u_r + \frac{1}{r}u + \frac{1}{r}v_\varphi = 0.$$

3. Выражение компонент скорости геострофического течения через давление

Теперь рассмотрим некоторые соотношения между основными гидрофизическими характеристиками. Начнем с процедуры вывода двух выражений компонент скорости геострофического течения через давление. Эти выражения получаются из системы уравнений в декартовых координатах (1) и из системы уравнений в полярных координатах (2).

1. Достижению цели способствуют следующие процедуры. Начинаем с вывода выражений компонент скорости геострофического течения через давление в декартовых координатах.

Из равенств

$$-\rho f v + p_x = 0, \ \rho f u + p_y = 0$$

получим выражения компонент скорости геострофического течения через давление в декартовых координатах, в результате имеем следующие формулы:

$$u = -\frac{p_y}{\rho f}, \ v = \frac{p_x}{\rho f}. \qquad (6)$$

2. Переходим к процедуре вывода выражений компонент скорости геострофического течения через давление в полярных координатах.

Из формулы (2) выражения компонент скорости геострофического течения через давление в полярных координатах имеют вид:

$$u = -\frac{p_\phi}{r\rho f}, \ v = \frac{p_r}{\rho f}. \qquad (7)$$

3. Следует проверить, что полученные выражения компонент скорости геострофического течения через давление согласуются с уравнением несжимаемости в декартовых и полярных координатах.

Используя формулы (6), получаем:

$$u_x + v_y = \left| \begin{array}{l} u = -\dfrac{p_y}{\rho f} \\ v = \dfrac{p_x}{\rho f} \end{array} \right| = \left(-\frac{p_y}{\rho f} \right)_x + \left(\frac{p_x}{\rho f} \right)_y = -\frac{p_{yx}}{\rho f} + \frac{p_{xy}}{\rho f} = 0.$$

Итак, выполненная проверка согласованности выражений компонент скорости геострофического течения через давление с уравнением несжимаемости в декартовых координатах (6) показала, что в этих координатах уравнение несжимаемости удовлетворяется автоматически.

4. Далее выполняется проверка согласованности выражений компонент скорости геострофического течения через давление (7) с уравнением несжимаемости в полярных координатах. Используя формулы (7), получаем:

$$u_r + \frac{1}{r}u + \frac{1}{r}v_\varphi = \left| \begin{array}{l} u = -\dfrac{p_\varphi}{r\rho f} \\ v = \dfrac{p_r}{\rho f} \end{array} \right| = \left(-\frac{p_\varphi}{r\rho f} \right)_r + \frac{1}{r}\left(-\frac{p_\varphi}{r\rho f} \right) + \frac{1}{r}\left(\frac{p_r}{\rho f} \right)_\varphi =$$

$$= -\frac{1}{\rho f}\left(-\frac{p_\varphi}{r^2} + \frac{p_{\varphi r}}{r} \right) + \frac{1}{\rho f}\left(-\frac{p_\varphi}{r^2} \right) + \frac{1}{\rho f}\left(\frac{p_{r\varphi}}{r} \right) = 0.$$

Следовательно, уравнение несжимаемости удовлетворяется автоматически.

4. Выражение завихренности через давление

Перейдем к процедуре вывода выражений завихренности через давление в декартовых и полярных координатах. Эти выражения выводятся из систем уравнений (1), (2) с использованием определения завихренности (3), (4). Кроме того, применяются выражения компонент скорости через давление (6) и (7).

1. Для завихренности в декартовых координатах получаем:

$$\omega = v_x - u_y = \left| \begin{array}{l} u = -\dfrac{p_y}{\rho f} \\ v = \dfrac{p_x}{\rho f} \end{array} \right| = \left(\frac{p_x}{\rho f} \right)_x - \left(-\frac{p_y}{\rho f} \right)_y = \frac{1}{\rho f}(p_{xx} + p_{yy}).$$

$$\omega = \frac{1}{\rho f}(p_{xx} + p_{yy}).$$

2. Аналогично в полярных координатах:

$$\omega = v_r + \frac{1}{r}v - \frac{1}{r}u_\varphi = \left| \begin{aligned} u &= -\frac{p_\varphi}{r\rho f} \\ v &= \frac{p_r}{\rho f} \end{aligned} \right| = \left(\frac{p_r}{\rho f}\right)_r + \frac{1}{r}\left(\frac{p_r}{\rho f}\right) - \frac{1}{r}\left(-\frac{p_\varphi}{r\rho f}\right)_\varphi =$$

$$= \frac{1}{\rho f}(p_{rr}) + \frac{1}{r}\left(\frac{p_r}{\rho f}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{p_{\varphi\varphi}}{\rho f}\right) = \frac{1}{\rho f}\left(p_{rr} + \frac{1}{r}p_r + \frac{1}{r^2}p_{\varphi\varphi}\right),$$

$$\omega = \frac{1}{\rho f}\left(p_{rr} + \frac{1}{r}p_r + \frac{1}{r^2}p_{\varphi\varphi}\right).$$

3. Выведем соотношение между давлением и функцией тока:

$$-\frac{p_y}{\rho f} = \psi_y, \ \frac{p_x}{\rho f} = -\psi_x,$$

$$p_y + \rho f \psi_y = 0, \ p_x + \rho f \psi_x = 0.$$

Это можно записать следующим образом:

$$(p + \rho f \psi)_y = 0, \ (p + \rho f \psi)_x = 0. \qquad (8)$$

Откуда следует, что

$$p + \rho f \psi = 0, \ \ p = -\rho f \psi. \qquad (9)$$

Замечание 2. Отсутствие константы интегрирования при переходе от двух равенств (8) к одному равенству (9) объясняется тем, что функция тока ψ определена с точностью до константы (см. формулы (5), которые инвариантны относительно сдвига функции ψ на константу), поэтому в ее выборе можно себя не ограничивать. В данном случае наиболее удобно считать эту константу нулевой.

Следствием формулы (9) является такое утверждение.

Утверждение 1. *Изобаты совпадают с линиями тока.*

Замечание 3. Благодаря функции тока уравнение несжимаемости удовлетворяется автоматически.

Утверждение 2. *В стационарных баротропных геострофических течениях изобаты совпадают с линиями тока.*

5. Геострофические течения

1. Теперь перейдем к изучению важнейшего класса геострофических течений. Для того чтобы его сформулировать, воспользуемся полярной системой координат. Рассматривается радиально-симметричное геострофическое течение такое, что для его радиальной и тангенциальной компонент скорости частиц жидкости, а также для давления имеют место следующие зависимости:

$$u = 0, \ v = v(r), \ p = p(r), \ \psi = \psi(r).$$

Равенство нулю радиальной компоненты скорости u означает, что в данном случае частицы жидкости движутся строго по окружностям, а отсутствие зависимости тангенциальной компоненты скорости v и давления p от азимута φ означает радиальную симметрию рассматриваемого геострофического течения.

Процесс изучения использует основные результаты предыдущего анализа. Наиболее интересным следствием является соотношение

$$-\rho f v(r) + p'(r) = 0. \tag{10}$$

В рассматриваемом ниже примере будет использовано еще одно соотношение:

$$\omega(r) = \frac{1}{\rho f}\left(p''(r) + \frac{1}{r}p'(r)\right) = \frac{1}{\rho f}\frac{(rp'(r))'}{r}. \tag{11}$$

2. Далее рассматривается динамика геострофических течений в северном полушарии, где $f > 0$. Все результаты несложно перенести на динамику геострофических течений в южном полушарии, где $f < 0$. Это ведет к тому, что все явления становятся прямо противоположными.

Разумеется, сказанное справедливо только для умеренных широт. В экваториальной области параметр Кориолиса, с одной стороны, мал, а с другой — это быстро меняющийся параметр, поэтому там анализ требует других средств.

Утверждение 3. *В северном полушарии циклон является областью пониженного давления. Соответственно, антициклон является областью повышенного давления.*

Доказательство. Поскольку в северном полушарии $f > 0$, то из соотношения (10) следует совпадение знаков тангенциальной скорости и производной давления.

Так как в случае циклона тангенциальная скорость положительна, то с увеличением расстояния от ядра циклона давление растет. Именно это означает, что в северном полушарии циклон является областью пониженного давления.

Для антициклона ситуация прямо противоположная. Погода при антициклоне малооблачная, ветра слабые. Причина в том, что при повышении давления температура тоже повышается.

При циклоне преобладает пасмурная погода с сильными ветрами. Причина в том, что при понижении давления температура тоже понижается. □

3. Более подробные результаты можно получить для конкретных зависимостей давления от радиуса. Рассмотрим типичный пример.

Давление (шапочка):

$$p(r) = \frac{b}{r^2 + a^2}. \tag{12}$$

Расчет выражения для функции $p'(r)$:

$$p'(r) = -\frac{2br}{(r^2 + a^2)^2}. \tag{13}$$

Расчет выражения для тангенциальной компоненты скорости проводится с учетом (10) и (13):

$$v(r) = -\frac{1}{\rho f}\frac{2br}{(r^2+a^2)^2}. \qquad (14)$$

Анализ выражений (12) для давления, (13) для функции $p'(r)$ и (14) для тангенциальной компоненты скорости подтверждает вышеприведенное утверждение 1.

4. В заключение выполним один расчет и изучим поведение завихренности.

Используя формулы (13) и (11), получаем зависимость завихренности от расстояния до центра вихря:

$$\omega(r) = \frac{4b}{\rho f}\frac{r^2-a^2}{(r^2+a^2)^3}. \qquad (15)$$

Формула (15) показывает, что в рассматриваемом случае завихренность меняет знак при переходе через окружность $r = a$. При этом антициклон превращается в циклон. Данная особенность поведения геострофических течений типична.

Заключение

Выполненный анализ можно продолжить. Одно из направлений продолжения — сопоставление теории геострофических течений с теорией двумерных дискретных вихрей, что позволит, пользуясь обнаруженной аналогией, существенно дополнить теорию геострофических течений.

Список литературы

1. *Козлов В. В.* Общая теория вихрей. Ижевск, 1998.

2. *Зайцев А. А., Руденко А. И.* Влияние границ на динамику вихрей // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 6. С. 25—34.

Об авторах

Анатолий Алексеевич Зайцев — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Алексей Иванович Руденко — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Светлана Михайловна Алексеева — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет, Россия.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru

The authors

Dr Anatoly A. Zaitsev, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Alexey I. Rudenko, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Svetlana M. Alekseeva, Associate Professor, Kaliningrad State Technical University, Russia.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru