ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

В.Н.Р ы б а к о в

ИНВАРИАНТНЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе рассматриваются специальные классы отображений поверхностей в E_3 с использованием инвариантных квадратичных форм.

Рассмотрим поверхность $V_2 \in E_3$ и ее произвольную точку M, радиус-вектор которой обозначим $\vec{M}$.

Отнесем поверхность V_2 к реперу первого порядка $R=\{M,\vec{e}_i\}$, где $\vec{e}_3$ единичный вектор нормали в точке M. Имеем известные формулы

$$d\vec{M} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k, \tag{1}$$

$$\omega^3 = 0. \tag{2}$$

Равенство (2) следует из того, что вектор $\vec{e}_3$ -направляющий вектор нормали в точке M.

Хорошо известно, что на поверхности V_2 имеются три линейно-независимые инвариантные квадратичные формы

$$\Phi^1 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \quad \Phi^2 = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3,$$
$$\Phi^3 = \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3, \tag{3}$$

Φ^1, Φ^2 -первая и вторая квадратичные формы, Φ^3 -форма Вейнгартена.

Образуем форму

$$\Psi = P_i^0 (H,K)\Phi^i, \quad i = 1,2,3. \tag{4}$$

В этой форме P_i^0 -заданные функции от полной кривизны и средней кривизны K. Дифференцируя уравнение (2) внешним образом, получим

$$\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \tag{5}$$

формы ω^1 и ω^2 линейно независимы. Применяя лемму Картана, имеем

$$\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \qquad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2. \tag{6}$$

В форме (4) заменим формы Φ^i их выражениями (3). Применив разложения (6), получим форму Ψ в виде:

$$\Psi = (p_1^0 + p_2^0 a + p_3^0 b)(\omega^1)^2 + (p_1^0 + p_2^0 c - p_3^0 b)(\omega^2)^2 +$$
$$+ [2p_2^0 b + p_3^0 (c-a)]\omega^1\omega^2. \tag{7}$$

Форма Ψ -квадратичная форма. Известно, что квадратичную форму заменой репера можно привести к сумме квадратов. (В точке M реперы остаются реперами первого порядка).

Будем считать, что замена сделана, и, сохраняя прежние обозначения, получим

$$2p_2^0 b + p_3^0 (c-a) = 0 \tag{8}$$

и

$$\Psi = A^2(\omega^1)^2 \pm B^2(\omega^2)^2, \tag{9}$$

где

$$A^2 = p_1^0 + p_2^0 a + p_3^0 b,$$
$$\pm B^2 = p_1^0 + p_2^0 c - p_3^0 b. \tag{10}$$

Заметим, что исследуются две системы знаков, другие выборы знаков приводят к тем же результатам.

Далее рассмотрим поверхность $\hat{V}_2 \in E_3$, её произвольную точку $\hat{M}$ и её радиус вектор $\hat{\vec{M}}$. Как и первую поверхность V_2, поверхность $\hat{V}_2$ отнесем к реперу первого порядка

$$\hat{R} = \{\hat{M}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}.$$

Для неё имеет место все сказанное относительно поверхности V_2. Поэтому отметим нужные нам формулы

$$\hat\omega^3_1=\hat a\,\hat\omega^1+\hat b\,\hat\omega^2,\qquad \hat\omega^3_2=\hat b\,\hat\omega^1+\hat c\,\hat\omega^2 \tag{11}$$

и

$$\hat\Psi=\hat p^\circ_i(\hat H,\hat K)\,\hat\Phi^i,\tag{12}$$

где $\hat p_i$ такие функции, что

$$\hat K=K,\quad \hat H=H,\quad \hat p^\circ_i=p^\circ_i.\tag{13}$$

Форму $\hat\Psi$ можно привести к форме, содержащей только квадраты. Тогда получим

$$2\hat p^\circ_2\hat b+\hat p^\circ_3(\hat c-\hat a)=0\tag{14}$$

и

$$\hat\Psi=\hat A^2(\hat\omega^1)^2\pm\hat B^2(\hat\omega^2)^2,\tag{15}$$

где

$$\hat A^2=\hat p^\circ_1+\hat p^\circ_2\hat a+\hat p^\circ_3\hat b,$$

$$\pm\hat B^2=\hat p^\circ_1+\hat p^\circ_2\hat c-\hat p^\circ_3\hat b.\tag{16}$$

Определим отображение $\varphi: V_2\to\hat V_2$ (17)

по закону

$$\Psi=\hat\Psi,\quad \hat p^\circ_i\hat\Phi^i=p^\circ_i\Phi^i.\tag{18}$$

Соотношение (18) выполняется при любых ω^1, ω^2.

Очевидно, что закон отображения есть отношение эквивалентности.

Учитывая равенства (9) и (15), получим из условия (18)

$$\hat A^2(\hat\omega^1)^2\pm\hat B^2(\hat\omega^2)^2=A^2(\omega^1)^2\pm B^2(\omega^2)^2.\tag{19}$$

Т е о р е м а. Если задана поверхность V_2 и функции $p^\circ_i(H,K)$, то отображение φ существует с произволом четырех функций одного аргумента.

При доказательстве рассмотрим два случая.

I. Формы Ψ, $\hat\Psi$, положительно определенные

$$\hat A^2(\hat\omega^1)^2+(\hat B^2)(\hat\omega^2)^2=A^2(\omega^1)^2+B^2(\omega^2)^2.\tag{20}$$

В этом случае общее решение уравнения (20) имеет вид:

$$\hat A\,\hat\omega^1=A\cos\alpha\cdot\omega^1+B\sin\alpha\,\omega^2,$$

$$\hat B\,\hat\omega^2=-A\sin\alpha\cdot\omega^1+B\cos\alpha\cdot\omega^2,\tag{21}$$

где α неизвестная функция координат точки M. Далее, учитывая известные формулы

$$\hat H=\hat a+\hat c;\quad \hat K=\hat a\hat c-\hat b^2\tag{22}$$

и равенство (14), исключим $\hat b$ из функций $\hat p^\circ_i(\hat a+\hat c,\hat a\hat c-\hat b^2)$. Тогда остается система Пфаффа, состоящая из уравнений (11), (21). Дифференцируя их внешним образом, получим четыре квадратичных уравнения с неизвестными формами $\hat\omega^2_1$, $d\alpha$, $d\hat a$, $d\hat c$; $s_1=4$, и решение зависит от четырех функций одного аргумента. Теорема доказана.

2. Формы Ψ и $\hat\Psi$ неопределенные

$$\hat A^2(\hat\omega^1)^2-\hat B^2(\hat\omega^2)^2=A^2(\omega^1)^2-B^2(\omega^2)^2.\tag{23}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\hat A\sin\beta\cdot\hat\omega^1=A\,\omega^1+B\cos\beta\cdot\omega^2,\tag{24}$$

$$\hat B\sin\beta\cdot\hat\omega^2=A\cos\beta\cdot\omega^1+B\,\omega^2,$$

где β -неизвестная функция от криволинейных координат точки M.

Далее этот случай исследуется точно так же, как и первый.

Опять получается $s_1 = 4$, то есть четыре функции одного аргумента. Теорема доказана.

Отметим некоторые частные случаи. Для их выделения заметим, что $\Psi = 0$ дает $\hat{\Psi} = 0$ (по некоторым направлениям), то есть эти равенства определяют соответствующие инвариантные сети (γ) и $(\hat{\gamma})$ на поверхностях V_2 и $\hat{V}_2$. Поэтому естественно выделить следующие случаи:

1/ Сеть (γ) -линии кривизны поверхности V_2.

Т е о р е м а. Если (γ)-линии кривизны поверхности V_2, то сеть $(\hat{\gamma})$ -тоже линии кривизны поверхности $\hat{V}_2$, и выполняется равенство

$$\hat{p}_3^\circ \hat{\Phi}^3 = p_3^\circ \Phi^3. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линии кривизны определяются равенством $\Phi^3 = 0$, то есть имеем

$$p_i^\circ \Phi^i = t \Phi^3. \tag{26}$$

Формы Φ^i независимы. Поэтому

$$p_1^\circ = 0, \quad p_2^\circ = 0, \quad t = p_3^\circ. \tag{27}$$

В силу определения функций $\hat{p}_i^\circ$ (13)

$$\hat{p}_1^\circ = 0, \quad \hat{p}_2^\circ = 0, \tag{28}$$

а тогда из равенств (18) получим равенство (26). Теорема доказана.

2/ Сеть (γ) на поверхности V_2 -асимптотические линии

В этом случае имеем теорему, аналогичную теореме о линиях кривизны, только равенство (18) примет вид

$$\hat{p}_2^\circ \hat{\Phi}^2 = p_2^\circ \Phi^2. \tag{29}$$

3/ Сеть (γ) -ортогональная сеть на V_2.

Т е о р е м а. Если сеть (γ) -ортогональна, то сеть $(\hat{\gamma})$ также ортогональна, и необходимым и достаточным условием для этого является выполнение равенства

$$p_2^\circ = -\frac{2p_1^\circ}{H}. \tag{30}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенств (9) видно, что сеть ортогональна, если

$$A^2 = -B^2, \tag{31}$$

а тогда из равенств (10) имеем равенство (30). В силу того, что имеют место о соотношения (13), получим

$$\hat{p}_2^\circ(\hat{H}, \hat{K}) = -\frac{2\hat{p}_1^\circ(\hat{H}, \hat{K})}{\hat{H}}. \tag{32}$$

При выполнении этого условия из равенства (16) получим

$$\hat{A}^2 = -\hat{B}^2, \tag{33}$$

и теорема доказана.

4/ Сеть (γ) сопряжена.

Т е о р е м а. Если сеть (γ) сопряжена на поверхности V_2, то и сеть $(\hat{\gamma})$ на поверхности $\hat{V}_2$ так же сопряжена. Необходимым и достаточным условием этого является выполнение равенства

$$p_1^\circ = -\frac{1}{2}\frac{p_3^{\circ 2} \cdot H}{p_2^\circ}. \tag{34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что сопряженные μ_1 и μ_2 определяются из равенства

$$(\omega^1 - \mu\omega^2)(\omega_1^3 \mu + \omega_2^3) = 0. \tag{35}$$

Используя равенства (6), получим

$$(b+\mu a)(\omega^1)^2-(\mu^2 b+\mu c)(\omega^2)^2+ \tag{36}$$
$$+(c-\mu^2 a)\omega^1\omega^2=0.$$

Сравнивая с формой Ψ (7), получим

$$c-\mu^2 a=0,\quad -\frac{\mu^2 b+\mu c}{b+\mu a}=-\frac{B^2}{A^2}. \tag{37}$$

Исключим μ^2 из второго уравнения (37) и используя значения A^2, B^2 и (18), получим равенство (34). Легко проверить, что если оно выполняется, то есть (γ) сопряжена. В силу равенств (13) имеем

$$\hat{P}_1^\circ(\hat{H},\hat{K})=-\frac{1}{2}\,\frac{\hat{P}_3^{\circ 2}(\hat{H},\hat{K})\cdot\hat{H}}{\hat{P}_2^\circ(\hat{H},\hat{K})}, \tag{38}$$

то есть сеть $(\tilde{\gamma})$ на поверхности $\hat{V}_2$ сопряжена и теорема доказана.

Список литературы

1. К а р т а н Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Изд.-во МГУ, 1962.

2. Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Г.Л.Свешникова, Н.В.Ермакова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка (коник) с характеристической точкой F плоскости коники, принадлежащей этой конике. Такие конгруэнции названы конгруэнциями $\mathcal{L}$. Ранее В.В.Рыжков [1] рассматривал в P_3 конгруэнции плоских алгебраических кривых, причем характеристическая точка плоскости коники не лежала на конике. Доказано существование конгруэнций $\mathcal{L}$. Рассмотрен класс конгруэнций $\mathcal{L}$ (конгруэнции $\mathcal{L}_1$), в котором для огибающей поверхности (F) семейства плоскостей коник найдена квадрика Ли Q. Получены характеристическое и фокальное многообразия конгруэнции (Q) квадрик Ли Q.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta,\ \alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4,$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры