УДК 514.75

М. А. Чешкова[1]

[1] *Алтайский государственный университет, Барнаул*

[1] cma@math.asu.ru, [1] cma41@yandex.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-14

Деформация односторонних поверхностей

Работа посвящена изучению деформации односторонних поверхностей, к которым относятся скрещенный колпак, римская поверхность, бутылка Клейна. Первые две являются моделями проективной плоскости.

Доказано, что если поверхность представляет собой модель либо листа Мёбиуса, либо бутылки Клейна, либо проективной плоскости, то деформация поверхности будет моделью листа Мёбиуса, бутылки Клейна или проективной плоскости соответственно.

С использованием математического пакета построены графики рассматриваемых поверхностей.

Ключевые слова: скрещенный колпак, римская поверхность, лист Мёбиуса, бутылка Клейна.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π -периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π -периодической и 2π -антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u+4\pi)$, то функция

$$s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u+2\pi))$$

Поступила в редакцию 26.12.2020 г.

есть 2π -периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi))$$

есть 2π -антипериодическая.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор.

Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным направлением нормали независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Модель листа Мёбиуса

Определим поверхность M уравнением

$$r(u, v) = s(u) + vl(u),\ u \in [-\pi, \pi], v \in [-1, 1]. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Поверхность M есть модель листа Мёбиуса, для которого кривая $\rho = \rho(u)$ есть край.*

Доказательство. Рассмотрим поверхность M как фактор-пространство [1, с. 75]

$$M = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] / [-\pi, -v] \approx [\pi, v].$$

Так как

$$r(-\pi, -v) = s(-\pi) - vl(-\pi),\quad s(-\pi) = s(\pi),\quad l(-\pi) = -l(-\pi),$$

имеем $r(-\pi, -v) = r(\pi, v)$.

Следовательно [1, с. 25], поверхность M есть модель листа Мёбиуса.

Следствие. Кривая dk : $r(u, 0) = s(u)$ — дезориентирующий контур поверхности M .

Доказательство. Определим вектор нормали $n(u, v)$ вдоль кривой $r(u, 0) = s(u)$. Имеем $r_u(u, 0) = s'(u)$, $r_v(u, 0) = l(u)$.

Поскольку $s'(u+2\pi)=s'(u),\ \ l(u+2\pi)=-l(u)$, получим

$$n(u,0)=[s'(u),l(u)]=-n(u+2\pi,0).$$

Модель бутылки Клейна

Рассмотрим замкнутую поверхность KL

$$\begin{aligned} &r(u,v)=(p+\cos(v))s(u)+\sin(v)l(u),\ \ p\neq\pm1,\\ &u\in[-\pi,\pi],\ \ v\in[-\pi,\pi]. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 2. *Поверхность KL определяет модель бутылки Клейна.*

Доказательство. Рассмотрим бутылку Клейна как фактор-пространство [1, с. 25, 75]

$$KL=[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]/[-\pi,-v]\approx[\pi,v],\ \ [u,-\pi]\approx[u,\pi].$$

Действительно,

$$r(u,-\pi)=(p-1)s(u)=r(u,\pi),$$
$$r(-\pi,-v)=(p+\cos(-v))s(-\pi)+\sin(-v)l(-\pi)=r(\pi,v).$$

Поверхность KL имеет два дезориентирующих контура

$$r(u,0)=(p+1)s(u),\ \ r(u,\pi)=(p-1)s(u).$$

Разрежем KL вдоль кривой $r=r(u,v_0)$, $u\in[-2\pi,2\pi]$, $v_0=const\neq0,\neq\pm\pi$. Получим два листа Мёбиуса (криволинейных) со средними линиями

$$r(u,0)=(p+1)s(u),\quad r(u,\pi)=(p-1)s(u).$$

Если $p+1=0$ $(p-1=0)$, то средняя линия

$$r(u,0)=(p+1)s(u)\ \ (r(u,\pi)=(p-1)s(u))$$

вырождается в точку. Один из листов Мёбиуса вырождается в конус, гомеоморфный сфере с дырой. Поверхность в этом случае гомеоморфна сфере с дырой, заклеенной листом Мёбиуса. Имеем модель проективной плоскости [1, с. 25].

Модели проективной плоскости

Определим поверхность P уравнением

$$r(u,v) = (1+\cos(v))s(u) + \sin(v)l(u),$$
$$u \in [-\pi,\pi],\ \ v \in [-\pi,\pi]. \tag{4}$$

Теорема 3. *Поверхность P есть модель проективной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим проективную плоскость как факторпространство [1, с. 75]

$$P = [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]/[(-\pi,-v) \approx (\pi,v),(-u,-\pi) \approx (u,\pi)].$$

Поскольку

$$r(\pi,v) = (1+\cos(v))s(\pi) + \sin(v)l(\pi),$$

$$r(-\pi,-v) = ((1+\cos(v))s(-\pi) + \sin(-v)l(-\pi),$$

$$s(-\pi) = s(\pi),\ \ l(-\pi) = -l(\pi),$$

$$r(-u,-\pi) = (1+\cos(\pi))s(-u) + \sin(-\pi)l(-u) = 0,$$

$$r(u,\pi) = (1+\cos(\pi))s(u) + \sin(\pi)l(u) = 0,$$

имеем $r(\pi,v) = r(-\pi,-v),\ \ r(u,\pi) = r(-u,-\pi)$.

Следовательно, поверхность P [1, с. 25] есть модель проективной плоскости.

Деформация односторонних поверхностей

Рассмотрим деформацию поверхности $r = r_1(u,v)$ в поверхность $r = r_2(u,v)$:

$$r = ar_2(u,v) + (1-a)r_1(u,v),\quad a \in [0,1]. \tag{5}$$

Пусть даны две 4π -периодические функции $\rho = \rho_1(u)$, $\rho = \rho_2(u)$. Тогда функция

$$\rho = a\rho_2(u) + (1-a)\rho_1(u),\ a = const,$$

будет также 4π -периодической. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если поверхности $r = r_1(u,v)$ и $r = r_2(u,v)$ есть модели либо листа Мёбиуса, либо бутылки Клейна, либо проективной плоскости, то поверхность (5) есть модель листа Мёбиуса, бутылки Клейна или проективной плоскости соответственно.*

В [2—5] изучаются односторонние поверхности.

Построим пример поверхности (5).

Рассмотрим тор

$$\mathrm{r}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = (5+\cos(\mathrm{v}))\mathrm{e}(\mathrm{u}) + \sin(\mathrm{v})\mathrm{k},$$
$$\mathrm{e}(\mathrm{u}) = (\cos(\mathrm{u}), \sin(\mathrm{u}), 0),\ \mathrm{k} = (0,0,1),$$

и линию $\rho(\mathrm{u}) = r(\mathrm{u}, \mathrm{u}/2) = (5+\cos(\mathrm{u}/2))\mathrm{e}(\mathrm{u}) + \sin(\mathrm{u}/2)\mathrm{k}$.

Назовем ее обмоткой тора первого типа.

Рассмотрим также обмотку тора

$$\rho(\mathrm{u}) = (5+\cos(\mathrm{u}))\mathrm{e}(\mathrm{u}/2) + \sin(\mathrm{u})\mathrm{k}\ .$$

Назовем ее обмоткой тора второго типа. Построим поверхности P (4) (рис. 1, 2).

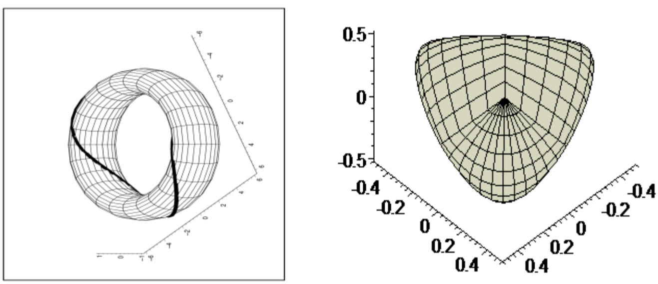

Рис. 1. Обмотка тора второго типа и римская поверхность

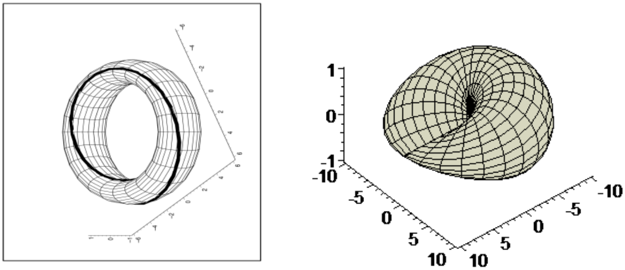

Рис. 2. Обмотка тора первого типа и скрещенный колпак

Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора первого типа, то поверхность P есть скрещенный колпак [4, с. 304]. Если кривая $\rho = \rho(u)$ есть обмотка тора второго типа, то поверхность P есть римская поверхность [4, с. 305; 5, с. 302].

Построим поверхность (5) (рис. 3).

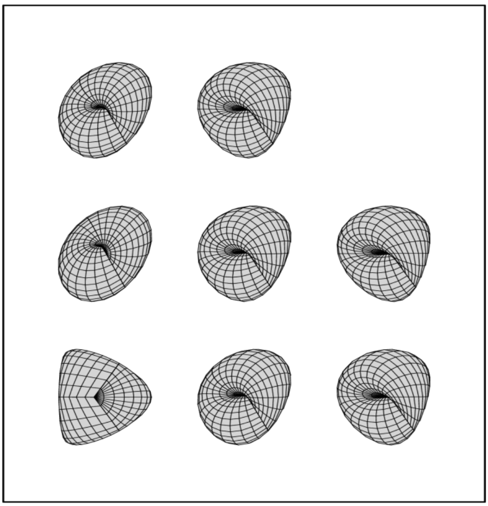

Рис. 3. Деформация римской поверхности в поверхность скрещенного колпака

Список литературы

1. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М., 1995.
2. *Чешкова М.А.* К геометрии односторонней поверхности // ДГМФ. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 162—168.
3. *Чешкова М.А.* Модель проективной плоскости // ДГМФ. Калининград, 2016. Вып. 47. С. 148—157.
4. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М.* Аналитические поверхности. М., 2006.
5. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М., 1981.

M. A. Cheshkova
[1] *Altai State University*
61 Prosp. Lenina, Barnaul, 656049, Russia
[1] cma@math.asu.ru, [1] cma41@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-52-14

Deformation of one-sided surfaces

Submitted on December 26, 2020

The work is devoted to the study of the deformation of one-sided surfaces. Let a normal vector be drawn along a closed curve on the surface. If, when returning to the original point, the direction of the normal coincides with the original direction of the normal, then the surface is called two-sided. Otherwise, we have a one-sided surface. Unilateral surfaces include: crossed cap, Roman surface, Boya surface, Klein bottle. Roman surface, Boya surface and crossed hood are a model of the projective plane.

It is proved that if the surface is a model of a Moebius strip, of a Klein bottle, of projective plane, then the surface deformation is a Moebius strip model, a Klein bottle model, projective plane model respectively.

Using a mathematical package, graphs are built the surfaces under consideration.

Keywords: crossed cap, Roman surface, Moebius strip, Klein bottle.

References

1. *Borisovich, Yu. G., Bliznyakov, N. M., Izrailevich, Ya. A., Fomenko, T. N.:* Introduction to topology. Moscow (1995).

2. *Cheshkova, M. A.:* To the geometry of a one-sided surface. *DGMF*. Kaliningrad. **46**, 162—168 (2015).

3. *Cheshkova, M. A.:* Projective plane model. *DGMF*. Kaliningrad. **47**, 148—157 (2016).

4. *Krivoshapko, S. N., Ivanov, V. N., Halabi, S. M.:* Analytical surfaces. Moscow (2006).

5. *Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.:* Visual geometry. Moscow (1981).