4. *Банару М.Б.* О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3–векторными произведениями на 6–мерных подмногообразиях алгебры октав // Полианалитические функции. Смоленск, 1997. С. 113–117.

5. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИИЛ, 1960. 216 с.

6. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере // М.: Изд-во МГУ, 1960. 298 с.

7. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Illinois J. Math. 1966. V. 10. №2. P. 353–366.

8. *Банару М.Б.*, *Банару Г.А.* Об уплощающихся 6–мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Избранные вопросы математики и методики ее преподавания. Смоленск, 1998. С. 31–32.

9. *Кириченко В.Ф.* Классификация келеровых структур, индуцированных 3–векторными произведениями на 6–мерных подмногообразиях алгебры Кэли // Изв. вузов. Мат. 1980. №8. С. 32–38.

10. *Calabi E.* Construction and properties of some six–dimensional almost complex manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 87. P. 407–438.

11. *Gray A.* Six–dimensional almost complex manifolds defined by means of three–fold vector cross products // Tôhoku Math. J. 1969. V. 21. P. 614–620.

12. *Yano K.*, *Sumitomo T.* Differential geometry of hypersurfaces in a Cayley space // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1962–1964. P. 216–231.

G.A. Banaru, M.B. Banaru

ON PLANED 6-DIMENSIONAL HERMITEAN SUBMANIFOLDS OF ALGEBRA OF OCTAVES

It is proved, that planed 6-dimensional Hermitean submanifolds of Cayle′s algebra of general is linear.

УДК 514.763.8

М.Б. Банару

(Смоленский гуманитарный университет)

О ПАРАКЕЛЕРОВЫХ И С-ПАРАКЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Получены критерии паракелеровости и *c*-паракелеровости почти эрмитовых многообразий. Приведены примеры 6-мерных паракелеровых и *c*-паракелеровых многообразий.

Известный американский геометр Альфред Грей отметил [1], что ключом к геометрии почти эрмитовых многообразий являются тождества, которым удовлетворяет их тензор римановой кривизны (тензор Римана-Кристоффеля). А. Грей выделили несколько классов (типов) почти эрмитовых многообразий, характеризуемых тождествами:

$$\text{Класс R1: } \langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle R(X, Y)JZ, JT\rangle;$$

$$\text{Класс R2: } \langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle R(JX, JY)Z, JT\rangle + \langle R(JX, Y)JZ, T\rangle + \langle R(JX, Y)Z, JT\rangle;$$

$$\text{Класс R3: } \langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle R(JX, JY)JZ, JT\rangle.$$

Многообразия класса R1 интенсивно изучались многими авторами, причем обычно под названием паракелеровых многообразий [2] или f-пространств [3]. В настоящей статье предметом исследования наряду с паракелеровыми многообразиями являются и так называемые *c*-паракелеровы многообразия, т. е. почти эрмитовы многообразия, тензор Вейля конформной кривизны которых удовлетворяет тождеству:

$$\langle W(X, Y)Z, T\rangle = \langle W(X, Y)JZ, JT\rangle.$$

Оно аналогично тождеству, характеризующему *R*1-многообразия.

Рассмотрим почти эрмитово многообразие, т. е. четномерное многообразие M^{2n}, оснащенное римановой метрикой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и почти комплексной структурой J. При этом должно выполняться условие

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \qquad \forall X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Через $\aleph(M^{2n})$ обозначен модуль гладких (класса C^{∞}) векторных полей на многообразии M^{2n}, через R – тензор римановой кривизны; ric – тензор Риччи [4], W – тензор Вейля конформной кривизны. Напомним, что компоненты тензора Вейля конформной кривизны связаны с компонентами R, ric и g соотношением:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(ric_{ik}g_{jl} + ric_{jl}g_{ik} - ric_{il}g_{jk} - ric_{jk}g_{il}\right) + \frac{K}{(n-1)(n-2)}\left(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik}\right),$$

где K – скалярная кривизна многообразия. Здесь и далее i, j, k, l=1, …, 2n.

Задание почти эрмитовой структуры на многообразии эквивалентно заданию G-структуры, где G – унитарная группа U(n) [5]. Ее элементами являются реперы, адаптированные структуре (A-реперы). Важнейшие тензоры целесообразно рассматривать записанными в A-репере. Это соответствует задачам исследования почти эрмитовых многообразий. В.Ф. Кириченко, разработавший подобный метод [6], ввел понятие спектра тензора.

Спектры тензоров, определяющих почти эрмитову структуру, выглядят следующим образом [7]:

$$1)\ g_{ab}=0,\quad g_{\hat{a}b}=\delta_b^a,\quad g_{a\hat{b}}=\delta_a^b,\quad g_{\hat{a}\hat{b}}=0;$$

$$2)\ J_b^a=i\delta_b^a,\quad J_b^{\hat{a}}=0,\quad J_{\hat{b}}^a=0,\quad J_{\hat{b}}^{\hat{a}}=-i\delta_a^b.$$

Здесь и далее a, b, c, d, h=1, …, n; $\hat{a}$ =a + n; $i=\sqrt{-1}$.

Фундаментальная (или келерова) форма почти эрмитова многообразия определяется равенством

$$F(X,Y)=\langle X, JX\rangle,\qquad X,Y\in\aleph(M^{2n}).$$

Спектр фундаментальной формы почти эрмитова многообразия имеет вид [7]:

$$F_{ab}=0,\quad F_{\hat{a}b}=i\delta_b^a,\quad F_{a\hat{b}}=-i\delta_a^b,\quad F_{\hat{a}\hat{b}}=0.$$

Таким образом, матрицы римановой метрики g, почти комплексной структуры J и фундаментальной формы F в A-репере запишутся следующим образом:

$$(g_{kj})=\left(\begin{array}{c|c}0 & I_n\\ \hline I_n & 0\end{array}\right),\ (J_j^k)=\left(\begin{array}{c|c}iI_n & 0\\ \hline 0 & -iI_n\end{array}\right),\ (F_{kj})=\left(\begin{array}{c|c}0 & iI_n\\ \hline -iI_n & 0\end{array}\right),$$

где I_n – единичная матрица порядка n.

Пусть ∇ – риманова связность метрики g почти эрмитова многообразия $\{M^{2n},g,J\}$. Напомним [8], что оператором кривизны называется отображение

$$R:\quad \aleph(M^{2n})\times\aleph(M^{2n})\times\aleph(M^{2n})\to\aleph(M^{2n}),$$

определяемое равенством

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z.$$

Определение. Тензором (полем) римановой кривизны многообразия M^{2n} называется 4-ковариантное тензорное поле, определяемое соотношением

$$R(X_1,X_2,X_3,X_4)=\langle R(X_3,X_4)X_2,X_1\rangle,\ \text{где}\ X_j\in T_p(M^{2n}),\quad j=1,2,3,4.$$

При этом тензор римановой кривизны [8], рассматриваемый как квадрилинейное отображение

$$T_p(M^{2n})\times T_p(M^{2n})\times T_p(M^{2n})\times T_p(M^{2n})\to(-\infty;+\infty),$$

обладает свойствами:

1) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_2, X_1, X_3, X_4)$,

2) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = -R(X_1, X_2, X_3, X_4)$,

3)$R(X_1, X_2, X_3, X_4) + R(X_1, X_3, X_4, X_2) + R(X_1, X_4, X_2, X_3)=0$, (1)

4) $R(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_1, X_2)$.

Теорема 1. *Почти эрмитово многообразие является паракелеровым многообразием тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется условие*

$$R_{abcd} = R_{\hat{a}bdc} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0. \tag{2}$$

Доказательство.

1. Пусть почти эрмитово многообразие является паракелеровым. Тогда для произвольных векторных полей $X, Y, Z, T \in \aleph(M^{2n})$ выполняется условие:

$$\langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle R(X, Y)JZ, JT\rangle. \tag{3}$$

Это условие можно переписать следующим образом:

$$R(T, Z, X, Y) = R(JT, JZ, X, Y).$$

Отсюда следует, что

$$R(X, Y, Z, T) = R(X, Y, JZ, JT).$$

Распишем последнее равенство на пространстве присоединенной G-структуры:

$$X^i Y^j Z^k T^l \big(R(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k, \varepsilon_l) - R(\varepsilon_i, \varepsilon_j, J\varepsilon_k, J\varepsilon_l)\big) = 0.$$

С учетом того, что индексы i, j, k, l пробегают значения от 1 до 2n, имеем:

$$X^a Y^b Z^c T^d R_{abcd} + X^{\hat{a}} Y^b Z^c T^d R_{\hat{a}bcd} + X^a Y^{\hat{b}} Z^c T^d R_{a\hat{b}cd} + X^{\hat{a}} Y^{\hat{b}} Z^c T^d R_{\hat{a}\hat{b}cd} +$$

$$+ X^a Y^b Z^{\hat{c}} T^{\hat{d}} R_{ab\hat{c}\hat{d}} + X^{\hat{a}} Y^b Z^{\hat{c}} T^{\hat{d}} R_{\hat{a}b\hat{c}\hat{d}} + X^a Y^{\hat{b}} Z^{\hat{c}} T^{\hat{d}} R_{a\hat{b}\hat{c}\hat{d}} + X^{\hat{a}} Y^{\hat{b}} Z^{\hat{c}} T^{\hat{d}} R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0.$$

Ясно, что тождество выполнятся тогда и только тогда, когда

$$R_{abcd}=0, \quad R_{\hat{a}bcd}=0,\ R_{a\hat{b}cd}=0,\ R_{ab\hat{c}\hat{d}}=0,\ R_{\hat{a}\hat{b}cd}=0,\ R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}=0,\ R_{a\hat{b}\hat{c}\hat{d}}=0,\ R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}}=0.$$

что эквивалентно равенствам (2).

2. Пусть имеет место (2). Рассмотрим равенство $R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$, или

$$R(\overline{\sigma}X, \overline{\sigma}Y, \sigma Z, \sigma T) = 0, \quad X, Y, Z, T \in \aleph(M^{2n}),$$

где операторы σ и $\overline{\sigma}$ определены так:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\mathrm{id} - \mathrm{i}J), \qquad \overline{\sigma} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \mathrm{i}J).$$

Раскрыв по линейности выражение

$$\frac{1}{16}R(X + iJX, Y + iJY, Z - iJZ, T - iJT) = 0,$$

получим:

$$\begin{gathered} R(X, Y, Z, T) + R(JX, JY, JZ, JT) + R(JX, Y, JZ, T) + R(X, JY, JZ, T) + \\ + R(JX, Y, Z, JT) + R(X, JY, Z, JT) - R(X, Y, JZ, JT) - R(JX, JY, Z, T) + \\ + i[R(JX, Y, Z, T) + R(X, JY, Z, T) - R(X, Y, JZ, T) - R(X, Y, Z, JT) - \\ - R(X, JY, JZ, JT) - R(JX, Y, JZ, JT) + R(JX, JY, JZ, T) + R(JX, JY, Z, JT)] = 0. \end{gathered}$$

Очевидно, это равенство равносильно обращению в нуль действительной компоненты его левой части

$$\begin{gathered} R(X, Y, Z, T) + R(JX, JY, JZ, JT) + R(JX, Y, JZ, T) + R(X, JY, JZ, T) + \\ + R(JX, Y, Z, JT) + R(X, JY, Z, JT) - R(X, Y, JZ, JT) - R(JX, JY, Z, T) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Поскольку условия $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = 0$ равносильны выполнению тождеств [9]

$$\begin{gathered} R(X,Y,Z,T)=R(JX,JY,JZ,JT), \\ R(X,Y,Z,T)= R(X,Y,JZ,JT) + R(X,JY,JZ,T) + R(JX,Y,JZ,T), \end{gathered}$$

то из (4) получаем, что

$$R(X,Y,Z,T)= R(JX,JY,Z,T) - R(JX,Y,JZ,T) - R(JX,Y,Z,JT) \tag{5}$$

Из (4) вытекает, что

$$R(X,Y,Z,T)= R(JX,JY,Z,T) + R(JX,Y,JZ,T) + R(JX,Y,Z,JT) \tag{6}$$

Складывая (5) и (6), получаем:

$$R(X,Y,Z,T)= R(JX,JY,Z,T),$$

что равносильно условию (3).

Теорема 2. *Почти эрмитово многообразие является c-паракелеровым многообразием тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется условие*

$$W_{abcd} = W_{\hat{a}bcd} = W_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0. \tag{7}$$

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство Теоремы I (достаточно в первом доказательстве всюду букву R заменить на W). Это, разумеется, объясняется тем, что тензор Вейля конформной кривизны обладает свойствами [8], аналогичными свойствам (1) тензора римановой кривизны.

В заключение, приведем примеры паракелеровых и *c*-паракелеровых многообразий. В [10] вычислены спектры тензора римановой кривизны и тензора Вейля конформной кривизны 6-мерных эрмитовых (общего типа) подмногообразий алгебры октав. В частности, показано (2) и $R_{\hat{a}b\hat{c}d} = -\sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{c}} T^{\varphi}_{bd}$, где T^{φ}_{kj} – компоненты тензора эйлеровой кривизны [11] (или, в более употребительной терминологии Грея [12], конфигурационного тензора). Здесь a, b, c, d = 1, 2, 3; $\hat{a} = a + 3$; $\varphi = 7, 8$; j, k= 1, …, 6. Из Теоремы I следует, что справедливо

Предложение 1. Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие (общего типа) алгебры Кэли является паракелеровым многообразием.

Этот факт, доказанный ранее в [13] другим способом, интересен прежде всего тем, что дает примеры некелеровых паракелеровых многообразий. К данному моменту известно относительно немного таких примеров, а тот факт, что всякое келерово многообразие является паракелеровым доказан еще Греем [1]. Среди 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли как раз много некелеровых многообразий (см., например, [7], [14], [15], [16]).

Воспользуемся значениями спектра тензора Вейля 6-мерных эрмитовых (общего типа) подмногообразий алгебры октав [10]:

$$W_{abcd} = W_{\hat{a}bcd} = 0,$$

$$W_{\hat{a}\hat{b}cd} = -\frac{1}{4}\left(\sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{h}} T^{\varphi}_{hc} \delta^{b}_{d} + \sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{b}\hat{h}} T^{\varphi}_{hd} \delta^{a}_{c} - \sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{a}\hat{h}} T^{\varphi}_{hd} \delta^{b}_{c} - \sum_{\varphi} T^{\varphi}_{\hat{b}\hat{h}} T^{\varphi}_{hc} \delta^{a}_{d} \right) + \frac{K}{20} \delta^{ba}_{cd}. \quad (8)$$

Поскольку тождественное обращение в нуль скалярной кривизны 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли [16] повлечет $T^{\varphi}_{kj} = 0$, получаем, что для 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав нулевой скалярной кривизны соотношения (8) примут вид (7). Из Теоремы II следует, что справедливо

Предложение 2. Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие (общего типа) алгебры Кэли нулевой скалярной кривизны является *c*-паракелеровым многообразием.

Список литературы

1. *Gray A.* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. V. 28. №4. P. 601-612.

2. *Rizza G.B.* Varietá parakahleriane // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1974. V. 98. № 4. P. 47-61.

3. *Sawaki S., Sekigawa K.* Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // J. Diff. Geom. 1974. V. 9. P. 123-134.

4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2 М.: Наука. 1981. 416 с.

5. *Gray A., Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants// Ann. Mat., Pura ed Appl. 1980. V. 123. №4. P. 35-58.

6. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных метрических многообразий // Проблемы геометрии. М.,1986. Т. 18. С. 25-72.

7. *Банару М.Б.* Эрмитова геометрия 6-мерных подмногообразий алгебры Кэли // Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: Изд-во МПГУ, 1993. 99 с.

8. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.:Наука, 1964. 664 с.

9. *Банару М.Б.* Об одном свойстве 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли / Смоленский госпединститут. Деп. в ВИНИТИ 13.11.96. № 3328-В96.

10. *Банару М.Б.* О спектрах важнейших тензоров 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Новейшие проблемы теории поля. Казань: КГУ-КЦ РАН, 2000. С. 18-22.

11. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: Изд-во МГУ, 1960. 298 с.

12 *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds // Ill. J. Math. 1966. V. 10 №2. P. 353-366.

13. *Банару М.Б.* О паракелеровости 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1994. № 25. С. 15-18.

14. *Кириченко В.Ф.* Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли: Сб. // Укр. геом. 1982. Т. 25. С. 60-68.

15. *Кириченко В.Ф.* Эрмитова геометрия шестимерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли // Вестник МГУ. 1994. №3. С. 6-13.

16. *Банару М.Б.* О 6-мерных эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. № 31. С. 6-8.

M.B. Banaru

ON PARAKAEHLERIAN AND C-PARAKAEHLERIAN MANIFOLDS

Criteria of parakaehlerianity and c-parakaehlerianity are found for almost hermitian manifolds. Exampes of 6-dimensional parakaehlerian and c-parakaehlerian are given.

УДК 514.75

О.О. Белова