3. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Там же, 1973. Т. 4. С. 7—70.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—248.

5. *Лумисте Ю.Г.* Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т. 69. С. 434—469.

6. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

7. *Лумисте Ю.Г.* Теория связностей в расслоенных пространствах // Алгебра, топология, геометрия — 1969 / ВИНИТИ. М., 1971. С. 123—168.

8. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

Yu. Shevchenko

LAPTEV'S AND LUMISTE'S WAYS OF CONNECTION REPRESENTATION IN THE PRINCIPAL FIBRE BUNDLE

Two modes of representation of group connection in the principal fibre bundle are considered, which are called as Laptev's and Lumiste's ways. It is shown, that these ways are equivalent.

УДК 514.75

С.Н. Юрьева

(Российский государственный университет им. Иммануила Канта)

НОРМАЛИЗАЦИЯ ФОССА - ГРИНА ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для гиперполосного распределения $S\mathcal{H} \subset A_n$ введена нормализация Фосса-Грина. Внутренним образом к $S\mathcal{H}$—распределению присоединяется поле соприкасающихся гиперквадрик, относительно которого поля нормалей Фосса и Грина полярно сопряжены.

Схема использования индексов в данной работе:

$$I, J, K, L = \overline{1, n} \;\; ; \;\; i, j, k = \overline{1, m} \;\; ; \;\; a, b, c = \overline{m+1, n-1} \;\; ;$$
$$\sigma, \rho, \tau = \overline{1, n-1} \;\; ; \;\; \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n} \;\; ; \;\; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} = \overline{1, m}, n \;\; ;$$
$$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{m+1, n-1}, n \,.$$

1. Рассмотрим специальный класс $\mathcal{H}$-распределений аффинного пространства A_n [1], для которых в каждом центре A плоскость $\Lambda(A)$ базисного Λ-подрасслоения сопряжена характеристике $L(A)$ относительно асимптотического конуса гиперплоскости $H(A)$:

$$x^n = 0, \;\; \Lambda^n_{\sigma\rho} x^\sigma x^\rho = 0, \;\; \det\left\|\Lambda^n_{\sigma\rho}\right\| \overset{\text{def}}{=} \Lambda \neq 0.$$

В этом случае

$$\Lambda^n_{ia} = 0. \tag{1}$$

$\mathcal{H}$-распределение, для которого выполняется условие (1), назовем $S\mathcal{H}$-распределением. В репере 1-го порядка R^1 $S\mathcal{H}$-распределение задается уравнениями:

$$\begin{gathered}
\omega^n_i = \Lambda^n_{i\hat{j}}\omega^{\hat{j}}, \;\; \omega^n_a = \Lambda^n_{a\hat{b}}\omega^{\hat{b}}, \; \omega^a_i = \Lambda^a_{iK}\omega^K, \;\; \omega^i_a = \Lambda^i_{aK}\omega^K, \\
\nabla\Lambda^n_{i\hat{j}} = \Lambda^n_{i\hat{j}K}\omega^K, \;\; \nabla\Lambda^n_{a\hat{b}} = \Lambda^n_{a\hat{b}K}\omega^K, \;\; \nabla\Lambda^a_{ij} + \Lambda^n_{ij}\omega^a_n = \Lambda^a_{ijK}\omega^K, \\
\nabla\Lambda^a_{ib} = \Lambda^a_{ibK}\omega^K, \;\; \nabla\Lambda^i_{ab} + \Lambda^n_{ab}\omega^i_n = \Lambda^i_{abK}\omega^K, \;\; \nabla\Lambda^i_{aj} = \Lambda^i_{ajK}\omega^K, \\
\nabla\Lambda^i_{an} - \Lambda^i_{ab}\omega^b_n - \Lambda^i_{aj}\omega^j_n + \Lambda^n_{an}\omega^i_n = \Lambda^i_{anK}\omega^K, \\
\nabla\Lambda^a_{in} - \Lambda^a_{ij}\omega^j_n - \Lambda^a_{ib}\omega^b_n + \Lambda^n_{in}\omega^a_n = \Lambda^a_{inK}\omega^K .
\end{gathered} \tag{2}$$

Имеет место теорема существования.

Теорема 1. *SH-распределение, несущее пару сопряженных подрасслоений* (Λ,L)*, существует с произволом* 2m(n-m-1) *функций n аргументов.*

2. Найдем уравнения фокальной поверхности [2] элемента Λ(*A*) Λ-подрасслоения при смещении центра *A* вдоль интегральных кривых *L*-подрасслоения:

$$\det\left\|\delta_b^a + x^i \Lambda_{ib}^a\right\| = 0, \ x^a = x^n = 0. \tag{3}$$

Таким образом, все фокальные точки плоскости Λ(*A*) лежат на алгебраической поверхности (3) порядка *n*-*m*-1 размерности *m*-1. Каждой точке $\vec{P} = \vec{A} + x^i \vec{e}_i$ фокальной поверхности (3) соответствует фокальное направление из Λ(*A*), определенное системой уравнений:

$$\omega^a + x^i \lambda_{ib}^a \omega^b = 0, \ x^a = x^n = 0.$$

Линейная поляра $G_{m-1}(A)$ точки A относительно фокальной поверхности (3) имеет вид:

$1 + x^i \Lambda_i = 0$, $x^a = x^n = 0$; (4)

$\Lambda_i = \dfrac{1}{n-m-1} \Lambda_{ia}^a$, $\nabla \Lambda_i = \Lambda_{iK} \omega^K$. (5)

Аналогично получаем линейную поляру $G_{n-m-2}(A)$ точки *A* относительно фокальной поверхности

$$\det\left\|\delta_j^i + x^a \Lambda_{aj}^i\right\| = 0, \ x^i = x^n = 0 \tag{6}$$

при смещении центра *A* вдоль кривых, принадлежащих плоскости Λ(*A*). Плоскость $G_{n-m-2}(A)$ имеет вид:

$$1 + x^a \Lambda_a = 0, \ x^i = x^n = 0; \tag{7}$$

$\Lambda_a = \dfrac{1}{m} \Lambda_{ai}^i$, $\nabla \Lambda_a$. (8)

В случае обращения тензоров (5), (8) в нуль соответствующие плоскости (4), (7) являются несобственными плоскостями.

Рассмотрим (n-2)-плоскость $G_{n-2}(A)$, проходящую через линейные поляры точки А относительно фокальных поверхностей (3) и (6) соответственно. В силу (4) и (7) плоскость $G_{n-2}(A)$ определяется системой уравнений

$$1+\Lambda_\sigma x^\sigma = 0, \quad x^n = 0\,. \tag{9}$$

Следуя работам [3; 4], плоскость $G_{n-2}(A)$ назовем ребром Грина $S\mathcal{H}$-распределения в точке A. В результате справедлива

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка поле тензора* $\{\Lambda_\sigma\}=\{\Lambda_i,\Lambda_a\}$ *внутренним образом определяет поле ребер Грина — поле нормалей 2-го рода $S\mathcal{H}$—распределения в смысле Нордена. Относительно локального репера ребро Грина $G_{n-2}(A)$ задается уравнениями (9).*

3. Фокальной гиперплоскостью $\mu(A)$ [5] базисного Λ-подрасслоения в точке А назовем всякую гиперплоскость $A\in\mu$, которая содержит две бесконечно близкие плоскости Λ-подрасслоения при смещении центра A вдоль некоторой интегральной кривой Λ-подрасслоения.

Зададим уравнение гиперплоскости $\mu(A)$ локальном репере R_1 в виде:

$$\mu_a x^a + \mu_n x^n = 0\,. \tag{10}$$

Используя уравнения $dA=\omega^J\vec{e}_J$, $d\vec{e}_I=\omega_I^K e_K$ и уравнения (2), получаем

$$dA\big|_{\omega^\alpha=0}=\omega^i\vec{e}_i\,,\ d\vec{e}_i\big|_{\omega^\alpha=0}=\omega_i^j\vec{e}_j+\Lambda_{ij}^a\omega^j\vec{e}_a+\Lambda_{ij}^n\omega^j\vec{e}_n\,. \tag{11}$$

В силу (10), (11) для искомой интегральной кривой Λ-подрасслоения выполняются соотношения

$$\omega^a=\omega^n=0\,,\ (\mu_a\Lambda_{ij}^a+\Lambda_{ij}^n\mu_n)\omega^j=0\,. \tag{12}$$

Для того чтобы система (12) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det\left\|\Lambda^n_{ij}\mu_n + \Lambda^a_{ij}\mu_a\right\| = 0\,. \qquad (13)$$

Итак, уравнение (13) определяет геометрическое место фокальных гиперплоскостей — фокальный гиперконус класса *m*, вершиной которого служит *m*-плоскость $\Lambda(A)$.

Линейной полярой гиперплоскости *H*(*A*) [6] относительно фокального гиперконуса (13), является связка гиперплоскостей

$$\mu_a(x^a - \frac{1}{m}\Lambda^{ij}_n\Lambda^a_{ij}x^n) = 0\,. \qquad (14)$$

Следовательно, (*m*+1)-плоскость

$$\Phi_{m+1}(A) = [A, \vec{e}_i, \vec{e}_n + \Lambda^a_n\vec{e}_a] \qquad (15)$$

принадлежит каждой гиперплоскости связки гиперплоскостей (14). Легко убедиться, что система функций $\left\{\Lambda^a_n\right\}$ в силу уравнений (2) образует квазитензор:

$$\Lambda^a_n = -\frac{1}{m}\Lambda^{ij}_n\Lambda^a_{ij},\quad \Lambda^{ij}_n\Lambda^n_{jk} = \delta^i_k,\quad \nabla\Lambda^a_n + \omega^a_n = \Lambda^a_{nK}\omega^K. \qquad (16)$$

Плоскость $\Phi_{m+1}(A)$ будем называть линейной полярой гиперплоскости *H*(*A*) относительно фокального гиперконуса (13).

4. Аналогичные построения проводим для L-подрасслоения данного *S𝓗*-распределения. Линейной полярой гиперплоскости *H*(*A*) относительно фокального гиперконуса класса *n*—*m*—1

$$\det\left\|\lambda^n_{ab}\mu_n + \Lambda^i_{ab}\mu_i\right\| = 0\,, \qquad (17)$$

вершиной которого служит плоскость *L*(*A*), является (*n*—*m*) — плоскость

$$\Phi_{n-m}(A) = [A; \vec{e}_a; \vec{e}_n + \Lambda^i_n\vec{e}_i]; \qquad (18)$$

$$\Lambda^i_n = -\frac{1}{n-m-1}\Lambda^{ab}_n\Lambda^i_{ab}\,,\ \Lambda^{ab}_n\Lambda^n_{bc} = \delta^a_c\,,\ \nabla\Lambda^i_n + \omega^i_n = \Lambda^i_{nK}\omega^K. \qquad (19)$$

Плоскости (15), (18) пересекаются в каждом центре A $S\mathcal{H}$-распределения по прямой

$$\Phi_1(A) = [A, \vec{\Phi}(A)]:$$

$$\Phi_1(A) = \Phi_{m+1}(A) \cap \Phi_{n-m}(A)\,,\ \vec{\Phi}_1(A) = \vec{e}_n + \Lambda_n^\sigma \vec{e}_\sigma\,; \qquad (20)$$

$$\Lambda_n^\sigma = \left\{\Lambda_n^a, \Lambda_n^i\right\},\ \nabla\Lambda_n^\sigma + \omega_n^\sigma = \Lambda_{nK}^\sigma \omega^K\,. \qquad (21)$$

Следуя работам [2; 3; 7], прямую $\Phi_1(A)$ (20) назовем нормалью Фосса в каждом центре A H-подрасслоения или нормалью 1-го рода в смысле Нордена $S\mathcal{H}$-распределения. Соответственно плоскости $\Phi_{m+1}(A)$ (15) и $\Phi_{n-m}(A)$ (18) назовем нормалями Фосса (нормали 1-го рода в смысле Нордена) L-подрасслоения и Λ-подрасслоения.

Теорема 3. *Нормаль Фосса (20) $S\mathcal{H}$-распределения в каждом центре A есть пересечение линейных поляр гиперплоскости $H(A)$ относительно фокальных гиперконусов (13), (17) соответственно Λ-подрасслоения и L-подрасслоения.*

Поля квазитензоров Λ_n^σ (21), Λ_n^i (19) 2-го порядка и поле квазитензора Λ_n^a (16) 1-го порядка задают, соответственно, поля нормалей Фосса (поля нормалей 1-го рода в смысле Нордена) $S\mathcal{H}$-распределения, Λ-подрасслоения и L-подрасслоения.

Теорема 4. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка внутренним инвариантным образом построена нормализация Форса — Грина (Φ_1; G_{n-2}) $S\mathcal{H}$-распределения — нормализация $S\mathcal{H}$-распределения в смысле Нордена — Чакмазяна.*

5. Найдем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик $S\mathcal{H}$-распределения [1]

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j + \Lambda_{ab}^n x^a x^b + 2A_i x^i x^n + 2A_a x^a x^n + T_o (x^n)^2 = 2x^n\,, \qquad (22)$$

относительно которых в каждом центре A ребро Грина $G_{n-2}(A)$ и нормаль Фосса $\Phi_1(A)$ $S\mathcal{H}$-распределения полярно сопряжены.

Из условия полярной сопряженности плоскостей $G_{n-2}(A)$ и $\Phi_1(A)$ относительно поля гиперквадрик (22) находим

$$A_i = t_i \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_i - \Lambda^n_{ij}\Lambda^j_n\,,\; A_a = t_a \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_a - \Lambda^n_{ab}\Lambda^b_n\,. \qquad (23)$$

Учитывая охваты (23) в формуле (22), убеждаемся, что справедлива

Теорема 5. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка внутренним образом к SH-распределению присоединяется поле соприкасающихся гиперквадрик*

$$\Lambda^n_{ij}x^i x^j + \Lambda^n_{ab}x^a x^b + 2t_i x^i x^n + 2t_a x^a x^n + T_0(x^n)^2 = 2x^n\,,$$

относительно которых поля нормалей Фосса и ребер Грина полярно сопряжены.

Список литературы

1. *Попов Ю.И,* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград, 1987. Деп. в ВИНИТИ № 6807—887Деп.

2. *Юрьева С.Н.* Нормализация Фосса — Грина гиперполосы $H_m(\Lambda)$ //Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С.160—165.

3. *Благонравов В.В.* Распределения на гиперповерхности аффинного пространства / Деп. в ВИНИТИ. М., № 4552 Деп.

4. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Акивис М.А*. Фокальные образы поверхности ранга ***r***// Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 9—19.

6. *Ивлев Е.Т., Лучинин А.А*. О полярном соответствии относительно алгебраической гиперповерхности и его приложениях //Геом. сб. Томск, 1968. Т. 7. С. 23—34.

7. *Акивис М.А*. О нормалях Фосса поверхности, несущей сеть сопряженных линий // Матем. сб. 1962. Т. 58. № 2. С. 695—706.

S. Yureva

NORMALIZATION OF FOSS–GREEN FOR THE HYPERSTRIP

DISTRIBUTION IN AFFINE SPASE

For hyperstrip distribution $S\mathcal{H} \subset A_n$ the normalization of Foss–Green is introduced. With an interior image to $S\mathcal{H}$-distribution the field of osculating hyperquadrics joins, concerning which field of the normals of Foss and Green polar conjugate.

СЕМИНАР
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Российском государственном университете им. Иммануила Канта

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара по 29 декабря 2004 года. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в 2005 году.

14.02.05. *В.С. Малаховский.* Конгруэнции и комплексы коник, порожденные проективной сферой.

21.02.05. *Ю.И. Шевченко.* Обзор статей калининградцев в сборнике трудов Международного геометрического семинара имени Г.Ф. Лаптева (Пенза, 2004).

28.02.05. *Ю.И. Попов.* Нормализации Нордена — Тимофеева $\mathcal{H}$-распре-делений проективного пространства.

1.03.05. *А.В. Кулешов.* О классической дифференциальной геометрии пространственных кривых.

15.03.05. *А.В. Кулешов.* О классической дифференциальной геометрии пространственных кривых.

21.03.05. *М.В. Кретов.* Комплексы эллиптических цилиндров.