ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

С.В.Малаховская

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $\mathcal{L}_m$ линейчатых невырожденных квадрик Q, имеющих невырожденное фокальное многообразие порядка $m \geqslant 2$. Доказано, что фокальная точка второго порядка квадрики Q является ее четырехкратной фокальной точкой.

Конгруэнция линейчатых квадрик тогда и только тогда является конгруэнцией $\mathcal{L}_3$, когда прямолинейные образующие квадрики, проходящие через фокальную точку третьего порядка, являются фокальными прямыми.

§1. КОНГРУЭНЦИИ $\mathcal{L}_2$.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ линейчатых квадрик к реперу $\mathcal{R}=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0, A_3 -фокальные точки квадрики $Q\in\mathcal{K}$, не принадлежащие одной прямолинейной образующей, A_0-фокальная точка порядка $m \geqslant 2$ [1], а A_0A_i, A_3A_i $(i,j,h,k=1,2)$ -прямолинейные образующие квадрики Q.

Пфаффова система уравнений конгруэнции $\mathcal{K}$ запишется в виде:

$$\begin{gathered}\omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_i^j=a_{ik}^j\,\omega^k,\quad \omega_i^3-\omega^j=c_{ik}\,\omega^k,\\ \omega_i^0-\omega_3^j=m_{ik}\,\omega_3^k,\quad \omega_3^i=b_k^i\,\omega^k,\quad \Omega=h_k\,\omega^k,\end{gathered}\tag{1.1}$$

где ω_α^β $(\alpha,\beta=0,1,2,3)$ -компоненты деривационных формул репера $\mathcal{R}$,

$$\omega_0^i=\omega^i,\ c_{12}=c_{21},\ m_{12}=m_{21},\ \Omega=\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3,\tag{1.2}$$

$i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Квадрика Q и ассоциированные квадрики Q_i [2] определяются соответственно уравнениями:

$$\mathcal{F}\equiv x^1x^2-x^0x^3\equiv 0,\tag{1.3}$$

$$\mathcal{F}_i\equiv h_i x^1x^2-a_{ii}^j\,(x^i)^2-a_{ji}^i\,(x^j)^2+\lambda_{ki}\,x^kx^3+c_{ki}\,x^kx^0=0,\tag{1.4}$$

где $\lambda_{ii}=m_{ik}\,b_i^k$, $\lambda_{ij}=m_{ik}\,b_j^k$. (1.5)

Точка A_0 тогда и только тогда является фокальной точкой порядка m, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\mathcal{F}=0,\quad d\mathcal{F}=0,\quad d^2\mathcal{F}=0,\ \ldots,\ d^m\mathcal{F}=0\tag{1.6}$$

вдоль любого направления $\omega^i=t^i\tau$ (τ -параметрическая форма [3]).

Рассмотрим сначала случай $m=2$.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned}d\mathcal{F}&=\vartheta_0\mathcal{F}+\mathcal{F}_k\,\omega^k,\\ d^2\mathcal{F}&=\vartheta_{00}\,\mathcal{F}+\vartheta^k\mathcal{F}_k+\mathcal{F}_{hk}\,\omega^h\omega^k\end{aligned}\right\},\tag{1.7}$$

где ϑ_0 -форма Пфаффа, ϑ^i, ϑ_{00} -квадратичные дифференциальные формы

$$\mathcal{F}_{hk}=c_{hk}\,(x^0)^2+\ldots,\tag{1.8}$$

а многоточием обозначены члены, не содержащие $(x^0)^2$.

Из (1.7) следует, что A_0 тогда и только тогда является фокальной точкой второго порядка, когда

$$c_{11}=c_{12}=c_{22}=0.\tag{1.9}$$

Уравнения (1.1), (1.9) характеризуют конгруэнции N [2].

Мы приходим к следующим теоремам.

Теорема 1.1. Конгруэнция линейчатых квадрик тогда и только тогда обладает невырождающимся фокальным многообразием второго порядка, когда она является конгруэнцией $\mathcal{N}$.

Т е о р е м а 1.2. Невырождающееся фокальное многообразие второго порядка конгруэнции квадрик является четырехкратной фокальной поверхностью конгруэнции.

Т е о р е м а 1.3. Конгруэнция $\mathcal{K}$ линейчатых квадрик тогда и только тогда является конгруэнцией $\mathcal{L}_2$, когда обе ассоциированные квадрики Q_i являются конусами с вершинами в фокальной точке A_o.

Анализируя систему уравнений (1.1), (1.9) убеждаемся, что конгруэнции $\mathcal{L}_2$ существуют с произволом четырех функций двух аргументов.

Так как произвольная конгруэнция квадрик имеет в общем случае восемь фокальных поверхностей, то она не может иметь более двух различных фокальных многообразий второго порядка.

Т е о р е м а 1.4. Точка поверхности является фокальной точкой второго порядка квадрики Ли.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конгруэнция квадрик Ли поверхности определяется пфаффовыми уравнениями (1) и конечными соотношениями

$$a^i_{ji}=0\,,\ c_{11}=c_{12}=c_{22}=0\,,\ h_i=0\,,\ \lambda_{ij}=0\,, \qquad (1.10)$$

которые включают в себя соотношения (1.9), характеризующие конгруэнции $\mathcal{L}_2$.

§ 2. КОНГРУЭНЦИИ $\mathcal{L}_3$

Рассмотрим теперь случай, когда A_o является фокальной точкой третьего порядка. Учитывая (1.9), получаем:

$$d^3\mathcal{F}=\vartheta_{00}\mathcal{F}+\vartheta^{k}_{o}\mathcal{F}_k+\vartheta^{kl}_{o}\mathcal{F}_{kl}+(-2a^2_{11}(\omega^1)^3+ \qquad (2.1)$$
$$+2(h_1-a^2_{12})(\omega^1)^2\omega^2+2(h_2-a^2_{12})\omega^1(\omega^2)^2-2a^1_{22}(\omega^2)^3(x^o)^2+\ldots,$$

где многоточием обозначены члены, не содержащие $(x^o)^2$. Для конгруэнций $\mathcal{L}_3$ кубичная дифференциальная форма при $(x^o)^2$ тождественно обращается в нуль. Следовательно, $h_i-a^j_{ij}=0\,,\ a^j_{ii}=0\,.$ (2.2)

Замыкая уравнение $\omega^3_i-\omega^j=0$, получаем

$$h_i+2a^j_{ij}=0\,. \qquad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) следует:

$$h_i=0\,,\quad a^j_{ii}=0\,,\quad a^j_{ij}=0\,. \qquad (2.4)$$

Учитывая (1.9), (2.4) в (1.1), получаем:

$$\lambda_{ii}=0\,,\ b^1_1=b^2_2\,,\ \lambda_{12}=\lambda_{21}\,,\ d\lambda_{12}-\lambda_{12}(\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^o_o)=0. \qquad (2.5)$$

Система (1.1), (2.4), (2.5) – в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{L}_3$ с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 2.1. Конгруэнция линейчатых квадрик тогда и только тогда является конгруэнцией $\mathcal{L}_3$, когда прямолинейные образующие квадрики, проходящие через фокальную точку третьего порядка, являются ее фокальными прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть конгруэнция $\mathcal{K}$ линейчатых квадрик является конгруэнцией $\mathcal{L}_3$. Тогда, в силу (2.4), (2.5), получаем:

$$\mathcal{F}_1=\lambda_{12}x^1x^3\,,\quad \mathcal{F}_2=\lambda_{12}x^2x^3 \qquad (2.6)$$

Следовательно, прямые A_oA_i – фокальные.

Наоборот, если A_oA_i – фокальные прямые квадрики $Q\in\mathcal{K}$, то они принадлежат и квадрике Q и обеим ассоциированным квадрикам. Это возможно лишь в случае, когда выполняются соотношения (1.9), (2.4), характеризующие конгруэнцию $\mathcal{L}_3$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. Если фокальная точка A_o третьего порядка описывает невырождающуюся поверхность, то она является фокальной точкой произвольного порядка $m\geqslant 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$dx^3=-x^1\omega^3_1-x^2\omega^3_2+(\Theta-\omega^3_3)x^3\,, \qquad (2.7)$$

где θ -форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом, то из (2.6) следует, что $d^m \mathcal{F}_i$ $(m=1,2,\dots)$ не могут содержать члена с $(x^0)^2$.

Значит, координаты точки A_0 удовлетворяют системе уравнений (1.6) при любом натуральном m. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что введенное в [1] понятие ранга в случае невырождающихся фокальных многообразий содержательно только для рангов 1,2,3.

Список литературы

1. М а х о р к и н В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.50-59.

2. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью.- В кн.: Дифференцтальная геометрия многообразий фигур. Вып.12, Калининград, 1981, с.44-47.

3. Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов.- В кн.: Тр. геометрич. семинара, М., 1971, т.3, с 29-48.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

П.Н.М и х а й л о в

О ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В работе рассмотрены поверхности постоянной средней кривизны $V_p \in E_n$ и общего вида. Выделены необходимые и достаточные условия постоянства средней кривизны на V_p. Дана сетевая характеристика поверхностей, отличных от поверхности постоянной средней кривизны. Рассмотрены случаи расслоения гиперповерхности V_p на поверхности постоянной средней кривизны.

1. Пусть задана неминимальная поверхность $V_p \subset E_n$. Отнесем поверхность V_p к подвижному полуортогональному реперу $\{x, \vec{e}_i\}$, где орты $\vec{e}_i$ $(i=1,\dots,p)$ принадлежат касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta=\overline{p+1,n})$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости, причем первые q векторов $\vec{e}_a$ $(a,b=\overline{p+1,p+q})$ из системы $\{\vec{e}_\alpha\}$ расположены в главной нормали $N_q(x) \subset N_{n-p}(x)$ поверхности [1].

Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются дифференциальными уравнениями:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^a \vec{e}_a,$$
$$d\vec{e}_a = \omega_a^i \vec{e}_i + \omega_a^b \vec{e}_b + \omega_a^\sigma \vec{e}_\sigma, \tag{1}$$
$$d\vec{e}_\sigma = \omega_\sigma^a \vec{e}_a + \omega_\sigma^\gamma \vec{e}_\gamma \quad (\sigma,\gamma=\overline{p+q+1,n}).$$

Следовательно, $\omega^\alpha = 0$, что при продолжении приводит к уравнениям:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ij}^\alpha, \tag{2}$$