Прямая $A_0 A_n$, определяющая тривиальное оснащение гиперповерх-
ности (A_0), содержится в этих пучках. Инвариантно присоединен-
ные к паре $\overset{\circ}{V}_{n-1,n}$ пучки определяются соответственно системами
уравнений (пучки нормалей второго рода гиперповерхности (A_0))

$$x^0 - (\sigma b^i \Gamma_i^{nk} \Gamma_{jk}^0 + b_j) x^j = 0, \quad x^n = 0; \tag{4.25}$$

$$x^0 - (\tilde{\sigma} \tilde{B}^i \Gamma_i^{nk} \Gamma_{jk}^0 + b_j) x^j = 0, \quad x^n = 0. \tag{4.26}$$

Инвариантные пучки соприкасающихся гиперквадрик гиперповерхнос-
ти (A_n) и её оснащение строится аналогично. Можно показать, что
если все инвариантно присоединенные к паре $\overset{\circ}{V}_{n-1,n}$ соприкасаю-
щиеся гиперквадрики гиперповерхности (A_0) в точке A_0 содер-
жат точку A_n, то и все инвариантно присоединенные к паре $\overset{\circ}{V}_{n-1,n}$
соприкасающиеся гиперквадрики гиперповерхности (A_n) в точке A_n
содержат точку A_0.

Величины ρ_1, ρ_2, Γ_1, Γ_0 являются инвариантами пары $\overset{\circ}{V}_{n-1,n}$
Условие $\rho_1 = 0$ $(\rho_2 = 0)$ означает, что $M_1 \equiv P_1$ $(M_2 \equiv P_2)$, условие
$\Gamma_1 = 0$ характеризует принадлежность точки A_n гиперплоскости
ξ_1; условие $\Gamma_0 = 0$ $(m = 0)$ означает, что проективные преоб-
разования $\overset{*}{x}{}^j = \rho \Gamma_i^{nj} x^i$ $(\overset{*}{x}{}^j = \rho m_i^j x^i)$ $(n-2)$-плоскости τ яв-
ляются преобразованиями W.

Литература

1. Е.Т.Ивлев, Материалы итоговой научной конференции по математике и механике за 1970г. I. Томск, 1971, 121–123.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Московского матем. общества, т.2, 275–383, ГИТТЛ, М., 1953.

3. В.С.Малаховский, Тр. Томского ун-та, 1963, 168, 28–42.

4. М.М.Похила, Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград 1971, 2, 55–62.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3 1973

СВЕШНИКОВА Г.Л.

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью (F). Построены канонические реперы конгруэнций, для которых поверхность (F) – линия и точка. Решена задача расслоения для случая вырождения фокальной поверхности (F) в точку.

§I. Конгруэнции коник с одной фокальной поверхностью, вырождающейся в линию.

Определение. Конгруэнцией $\mathfrak{J}$ называется конгруэнция кривых второго порядка (коник), обладающая следующими свойствами:

1) существуют две невырождающиеся фокальные поверхности S_i $(i, j, k = 1, 2)$, не являющиеся огибающими плоскостей коник,

2) существует фокальная поверхность (F), вырождающаяся в линию, причем касательная ℓ к линии (F) не инцидентна плоскости коники,

3) фокальные линии на поверхностях S_i не соответствуют друг другу.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{J}$ к реперу $R=\{\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\bar{A}_4\}$, поместив вершины A_i в фокальные точки коники, описывающие поверхности S_i, вершину A_3 – в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, вершину A_4 – вне плоскости коники. Единичную точку E прямой A_1A_2 расположим на прямой A_3F, где

$$\bar{F}=\bar{A}_1+\bar{A}_2-\sqrt{2}\,\bar{A}_3 \qquad (1.1)$$

– фокус, описывающий вырождающуюся в линию фокальную поверхность.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \qquad (1.2)$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta \qquad (1.3)$$

Так как фокальные линии на поверхностях (A_i) не соответствуют, то формы

$$\omega_i^4=\omega_i \qquad (1.4)$$

можно принять за независимые первичные формы конгруэнции $\mathcal{J}$.

Уравнения коники и система уравнений конгруэнции $\mathcal{J}$ при соответствующей нормировке вершин репера приводятся к виду:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0. \qquad (1.5)$$

$$\omega_i^j=\Gamma_i^{ji}\omega_i, \quad \omega_i^3=\Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k, \quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k,$$
$$\omega_i^i-\omega_3^3+\omega_j^i+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i)=\alpha_i(\omega_1+\omega_2-\sqrt{2}\,\omega_3^4) \qquad (1.6)$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Система (1.6) определяет конгруэнции $\mathcal{J}$ с произволом пяти функций двух аргументов.

Дальнейшую канонизацию репера осуществляем так, чтобы

$$\alpha_1=\alpha_2=0, \quad \Gamma_1^{21}+\Gamma_2^{12}=0. \qquad (1.7)$$

При этом вершина A_4 репера становится четвертой гармонической к фокусу F относительно точек пересечения с прямой ℓ касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i.

§2. Конгруэнции $\mathcal{J}_1$.

Определение. Конгруэнцией $\mathcal{J}_1$ называется конгруэнция $\mathcal{J}$, обладающая следующими свойствами:

1) прямая A_3A_4 является линией пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i,

2) точка A_3 совпадает с характеристической точкой плоскости коники, поверхность (A_3) не вырождается в точку,

3) фокальная сеть $\omega_1\omega_2=0$ является асимптотической сетью на поверхностях (A_i).

Теорема 1. Конгруэнции $\mathcal{J}_1$ существуют и определяются с точностью до проективных преобразований с произволом одной постоянной.

Доказательство. Учитывая условия определения конгруэнции $\mathcal{J}_1$, можно привести систему конечных и пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{J}_1$ к виду:

$$\Gamma_3^{12}(\Gamma_1^{31}+\Gamma_1^{32}+\Gamma_2^{31}+\Gamma_2^{32})=0. \qquad (2.1)$$

$$\sqrt{2}\,\Gamma^{12}_{3}\left(\Gamma^{31}_{1}+\Gamma^{32}_{1}\right)+\Gamma^{32}_{4}-\Gamma^{31}_{4}=0. \qquad (2.1)$$

$$\omega^{j}_{i}=\omega^{4}_{3}=0,\quad \omega^{i}_{i}-\omega^{3}_{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\omega^{3}_{1}+\omega^{3}_{2}-2\omega^{i}_{3}\right)=0,$$

$$\omega^{i}_{3}=\Gamma^{12}_{3}\,\omega_{j},\quad \omega^{3}_{4}=\Gamma^{3k}_{4}\,\omega_{k}, \qquad (2.2)$$

$$\omega^{3}_{i}=\Gamma^{3k}_{i}\,\omega_{k},\quad \omega^{i}_{4}=\Gamma^{12}_{3}\left(\Gamma^{3i}_{j}\,\omega_{i}-\Gamma^{3j}_{j}\,\omega_{j}\right).$$

Осуществляя продолжение системы

$$\omega^{i}_{3}=\Gamma^{12}_{3}\,\omega_{j}, \qquad (2.2')$$

получаем уравнение Пфаффа

$$d\ln\Gamma^{12}_{3}+\omega^{3}_{3}-\omega^{4}_{4}=\sqrt{2}\left(\omega^{3}_{1}+\omega^{3}_{2}-\omega^{1}_{3}-\omega^{2}_{3}\right), \qquad (2.3)$$

замыкание которого даст конечное соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(3\Gamma^{32}_{2}-3\Gamma^{31}_{1}+\Gamma^{32}_{1}-\Gamma^{31}_{2}\right)+\Gamma^{32}_{4}-\Gamma^{31}_{4}=0. \qquad (2.4)$$

Так как поверхность (A_3) не вырождается в точку, то можно так пронормировать вершины репера, чтобы

$$\Gamma^{12}_{3}=1. \qquad (2.5)$$

Полагая

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma^{32}_{4}-\Gamma^{31}_{4}\right)=\Gamma, \qquad (2.6)$$

из соотношений (2.1), (2.4) находим

$$\Gamma^{32}_{1}=-\Gamma^{31}_{1}-\Gamma,\quad \Gamma^{31}_{2}=\Gamma-\Gamma^{31}_{1},\quad \Gamma^{32}_{2}=\Gamma^{31}_{1}. \qquad (2.7)$$

Уравнения третьей строки системы (2.2) запишутся в виде:

$$\omega^{3}_{1}=\Gamma^{31}_{1}\omega_{1}-\left(\Gamma^{31}_{1}+\Gamma\right)\omega_{2},\quad \omega^{3}_{2}=\left(\Gamma-\Gamma^{31}_{1}\right)\omega_{1}+\Gamma^{31}_{1}\omega_{2},$$

$$\omega^{1}_{4}=\left(\Gamma-\Gamma^{31}_{1}\right)\omega_{1}-\Gamma^{31}_{1}\omega_{2},\quad \omega^{2}_{4}=-\Gamma^{31}_{1}\omega_{1}-\left(\Gamma^{31}_{1}+\Gamma\right)\omega_{2}. \qquad (2.8)$$

Систему (2.8) можно заменить эквивалентной ей системой:

$$\omega^{3}_{1}-\omega^{2}_{4}=2\Gamma^{31}_{1}\omega_{1},\quad \omega^{3}_{2}-\omega^{1}_{4}=2\Gamma^{31}_{1}\omega_{2}, \qquad (2.9)$$

$$\omega^{1}_{4}-\omega^{2}_{4}+\omega^{3}_{1}+\omega^{3}_{2}=2\Gamma\omega_{1},\quad \omega^{1}_{4}-\omega^{2}_{4}-\omega^{3}_{1}-\omega^{3}_{2}=2\Gamma\omega_{2}. \qquad (2.10)$$

Замыкая уравнения (2.9) и (2.10), получим систему двух пфаффовых уравнений:

$$d\Gamma^{31}_{1}+\Gamma^{31}_{1}\left(\omega^{3}_{3}-\omega^{4}_{4}\right)+\omega^{3}_{4}=0, \qquad (2.11)$$

$$d\Gamma+\sqrt{2}\left[(\Gamma)^{2}+\Gamma^{31}_{1}\right](\omega_{1}-\omega_{2})-\Gamma^{31}_{4}\omega_{1}+\Gamma^{32}_{4}\omega_{2}=0 \qquad (2.12)$$

и квадратичное уравнение:

$$\left[5(\Gamma)^{2}+\sqrt{2}\left(\Gamma^{31}_{4}+\Gamma^{32}_{4}\right)-4\Gamma^{31}_{1}\right]\omega_{1}\wedge\omega_{2}+d\Gamma^{32}_{4}\wedge\omega_{2}-d\Gamma^{31}_{4}\wedge\omega_{1}=0. \qquad (2.13)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение $\omega^{3}_{4}=\Gamma^{3k}_{4}\omega_{k}$, получим квадратичное уравнение

$$d\Gamma^{31}_{4}\wedge\omega_{1}+d\Gamma^{32}_{4}\wedge\omega_{2}+\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\Gamma^{31}_{4}+\Gamma^{32}_{4}\right)-2\right]\Gamma\,\omega_{1}\wedge\omega_{2}=0. \qquad (2.14)$$

Учитывая (2.6) в уравнении (2.12), из уравнений (2.13) и (2.14) получаем уравнение Пфаффа

$$2d\Gamma^{31}_4+[2(\Gamma^{32}_4)^2-(\Gamma^{31}_4)^2-\Gamma^{31}_4\Gamma^{32}_4+4\sqrt{2}\,\Gamma^{31}_4-8\Gamma^{31}_1]\,\omega_1+$$

$$+[4(\Gamma^{32}_4)^2+4(\Gamma^{31}_4)^2+2\sqrt{2}\,\Gamma^{32}_4-5\Gamma^{31}_4\Gamma^{32}_4-4\Gamma^{31}_1]\,\omega_2=0, \qquad (2.15)$$

замыканием которого является конечное соотношение

$$(\Gamma^{32}_4-\Gamma^{31}_4)[\sqrt{2}(\Gamma^{32}_4+\Gamma^{31}_4)-4\Gamma^{31}_1]=0. \qquad (2.16)$$

Пусть

$$\Gamma^{32}_4-\Gamma^{31}_4=0. \qquad (2.17)$$

Тогда из (2.12) получаем

$$\sqrt{2}\,\Gamma^{31}_1-\Gamma^{31}_4=0 \qquad (2.18)$$

и уравнение (2.11) принимает вид

$$d\Gamma^{31}_1=0. \qquad (2.19)$$

Значит,

$$\Gamma^{31}_1=\mathrm{Const}. \qquad (2.20)$$

Обозначим

$$\Gamma^{31}_1=\gamma. \qquad (2.21)$$

Так как при $\gamma=0$ поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются, а этот случай исключен из рассмотрения по определению конгруэнции $\mathcal{J}$, то $\gamma\neq 0$.

Матрица компонент деривационных формул канонического репера рассматриваемого класса конгруэнций запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_2-\omega_1) & 0 & \gamma(\omega_1-\omega_2) & \omega_1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1-\omega_2) & -\gamma(\omega_1-\omega_2) & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1+\omega_2) & 0 \\ -\gamma(\omega_1+\omega_2) & -\gamma(\omega_1+\omega_2) & \sqrt{2}\gamma(\omega_1+\omega_2) & \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1+\omega_2) \end{bmatrix}. \qquad (2.22)$$

При условии

$$\sqrt{2}(\Gamma^{32}_4+\Gamma^{31}_4)-4\Gamma^{31}_1=0 \qquad (2.23)$$

получаем подкласс конгруэнций, характеризуемых матрицей (2.22). Следовательно, (2.22) является матрицей компонент деривационных формул канонического репера конгруэнции $\mathcal{J}_1$.

Анализируя уравнения, определяющие конгруэнции $\mathcal{J}_1$, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{J}_1$ имеют пять невырождающихся фокальных поверхностей. Фокальная поверхность (F) является прямой линией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы уравнений

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0, \quad x^4=0, \quad x^k\omega_k=0,$$
$$x^1x^3(\omega^2_3-\omega^3_1)+x^2x^3(\omega^1_3-\omega^3_2)+x^1x^2(\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^3_3)=0 \qquad (2.24)$$

для определения фокальных поверхностей конгруэнции $\mathcal{J}_1$, кроме фокусов A_i и F, находим фокусы:

$$\bar F_1=\bar A_1+\bar A_2+\sqrt{2}\bar A_3, \quad \bar F_2=\bar A_1+\left(\frac{m}{2\gamma^2}-1\right)\bar A_2-\frac{m}{\sqrt{2}\gamma}\bar A_3,$$
$$\bar F_3=\bar A_1+\left(\frac{n}{2\gamma^2}-1\right)\bar A_2-\frac{n}{\sqrt{2}\gamma}\bar A_3, \qquad (2.25)$$

где

$$m=1+\sqrt{1-4\gamma^2}, \quad n=1-\sqrt{1-4\gamma^2}. \qquad (2.26)$$

Используя матрицу (2.22), убеждаемся, что фокальные поверхности (F_1), (F_2), (F_3) не вырождаются, а фокальная поверхность (F) представляет собой прямую, проходящую через точку A_4.

С конгруэнцией $\mathcal{J}_1$ естественно ассоциируются четыре прямолинейных конгруэнции $(A_1A_2), (A_3A_4), (F_1A_4), (PT)$.

Фокусы E и E^* луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) определяются формулами

$$\bar{E} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2, \quad \bar{E}^* = \bar{A}_1 - \bar{A}_2. \tag{2.27}$$

Так как поверхность (A_4) вырождается в прямую линию, то точка A_4 является фокусом лучей A_3A_4 и F_1A_4 прямолинейных конгруэнций (A_3A_4) и (F_1A_4). Обозначив буквами P и T вторые фокусы лучей этих конгруэнций и используя матрицу (2.22), находим

$$\bar{P} = 2\gamma\bar{A}_3 + \bar{A}_4. \tag{2.28}$$

$$\bar{T} = \sqrt{2}\gamma\bar{F}_1 + \bar{A}_4. \tag{2.29}$$

Т е о р е м а 3. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_iA_4), (A_3A_4), (F_1A_4), (PT), присоединенных к конгруэнции $\mathcal{J}_1$, соответствуют. Фокусы луча A_1A_2 гармонически делят точки A_1 и A_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь матрицей (2.22), убеждаемся, что уравнения торсов указанных прямолинейных конгруэнций совпадают и записываются в виде:

$$(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2 = 0. \tag{2.30}$$

Из формул (2.27) для фокусов прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) следует, что

$$(A_1A_2; EE^*) = -1. \tag{2.31}$$

О п р е д е л е н и е. Линии

$$\omega_j + (-1)^j\omega_i = 0, \tag{2.32}$$

соответствующие торсам прямолинейной конгруэнции (A_1A_2), называются линиями $\mathcal{L}_i$ на поверхности.

Т е о р е м а 4. Касательные к линии $\mathcal{L}_2$ на поверхностях $(A_1), (A_2), (P), (E)$ конгруэнции $\mathcal{J}_1$ пересекаются в точке A_4. Касательные к линии $\mathcal{L}_1$ на поверхностях (A_1) и (A_2) пересекаются в точке P, а на поверхностях (P) и (E) - в точке E^*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из рассмотрения равенств:

$$(d\bar{A}_i)_{\omega_1-\omega_2=0} = \omega_i\bar{A}_4, \quad (d\bar{P})_{\omega_1-\omega_2=0} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_1+\omega_2)\bar{A}_4,$$

$$(d\bar{E})_{\omega_1-\omega_2=0} = (\omega_1+\omega_2)\bar{A}_4, \tag{2.33}$$

$$(d\bar{A}_i)_{\omega_1+\omega_2=0} = -\sqrt{2}\,\omega_i\bar{A}_i + \omega_i\bar{P}, \quad (d\bar{P})_{\omega_1+\omega_2=0} = 2\gamma\omega_2\bar{E}^*,$$

$$(d\bar{E})_{\omega_1+\omega_2=0} = \sqrt{2}\,\omega_2\bar{E}^*. \tag{2.34}$$

Т е о р е м а 5. Асимптотические линии на поверхностях (A_i), $(E), (A_3), (F_1), (P)$ соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, асимптотические линии на данных поверхностях определяются одним и тем же уравнением:

$$\omega_1\omega_2 = 0. \tag{2.35}$$

Т е о р е м а 6. Каждая из поверхностей (A_i) и (A_3) конгруэнции $\mathcal{J}_1$ является одной и той же линейчатой квадрикой

$$\mathcal{G} \equiv x^1x^2 - x^3x^4 + \gamma(x^4)^2 = 0 \tag{2.36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки A_i и A_3 лежат на квадрике $\mathcal{Y}$. Дифференцируя (2.36) с помощью уравнений стационарности точки

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha + \theta x^\alpha, \quad \alpha, \beta = 1,2,3,4, \tag{2.37}$$

убеждаемся, что $\mathcal{Y}$ -инвариантная квадрика. Прямые A_iA_3 являются её прямолинейными образующими.

Т е о р е м а 7. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4), ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{J}_1$, образуют двусторонне расслояемую пару [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя матрицу (2.22), убеждаемся, что условия двустороннего расслоения прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4)

$$\omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0, \quad \omega_3^i \wedge \omega_i^3 - \omega_4^j \wedge \omega_j = 0,$$
$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2 = 0 \tag{2.38}$$

тождественно удовлетворяются.

§ 3. Конгруэнции K.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией K называется конгруэнция кривых второго порядка с одной вырождающейся в точку фокальной поверхностью, обладающая следующими свойствами:

1) существуют по крайней мере две невырождающиеся фокальные поверхности S_1 и S_2, не являющиеся огибающими плоскостей коник,

2) фокальные линии на фокальных поверхностях S_i не соответствуют друг другу,

3) существует расслоение от конгруэнции коник к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) [2].

Отнесем конгруэнцию K к реперу $R=\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4\}$, помещая вершины A_1 и A_2 в фокальные точки коники, описывающие поверхности S_1 и S_2, вершину A_3 - в полюс прямой A_1A_2 относительно коники, вершину A_4 - в точку пересечения касательных плоскостей к поверхностям $(A_1), (A_2), (A_3)$.

Единичную точку $\bar{E}=\bar{A}_1+\bar{A}_2$ на прямой A_1A_2 выбираем так, чтобы неподвижный фокус

$$\bar{F}=\bar{A}_1+\bar{A}_2-\sqrt{2}\,\bar{A}_3$$

был инцидентен прямой A_3E.

Т е о р е м а 8. Конгруэнции K существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа, определяющая конгруэнции K, имеет вид:

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^1 = \Gamma_3^{1k}\omega_k,$$
$$\omega_3^2 = \lambda\omega_3^1, \quad \omega_4^2 = \lambda\,\omega_4^1, \quad \omega_3^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1+\omega_2),$$
$$\omega_4^1 = \Gamma_4^{1k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \tag{3.1}$$
$$\omega_1^1-\omega_3^3+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^4)=0, \quad \omega_2^2-\omega_1^1=\sqrt{2}(\lambda-1)\omega_3^1,$$

причем

$$\Gamma_4^{11}=\Gamma_2^{31}\Gamma_3^{12}-\Gamma_3^{11}\Gamma_2^{32}, \quad \Gamma_4^{12}=\Gamma_1^{32}\Gamma_3^{11}-\Gamma_1^{31}\Gamma_3^{12}. \tag{3.2}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\omega_3^2=\lambda\,\omega_3^1, \quad \omega_4^2=\lambda\,\omega_4^1, \tag{3.3}$$

получаем пфаффово уравнение

$$d\lambda + \sqrt{2}\,\lambda(\lambda-1)\,\omega_3^1 = 0\,, \tag{3.4}$$

замыкание которого тождественно равно нулю. Продолжая систему (3.I), убеждаемся, что полученная замкнутая система – в инволюции и определяет решение с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 9. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4), ассоциированные с конгруэнцией K, односторонне расслояемы (от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4)). Двустороннего расслоения этих прямолинейных конгруэнций не существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения, определяющие конгруэнции K, убеждаемся, что условия расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к прямолинейной конгруэнции (A_3A_4)

$$\begin{gathered} \omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0\,, \\ \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

тождественно удовлетворяются.

Расслоение от прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) к прямолинейной кон руэнции (A_1A_2) определяется уравнениями:

$$\begin{gathered} \omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0\,, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2 = 0\,, \\ \omega_3^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^3 - \omega_4^1 \wedge \omega_1 - \omega_4^2 \wedge \omega_2 = 0 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Из этой системы получаем

$$\Gamma_3^{12} = \lambda\,\Gamma_3^{11}\,, \quad \Gamma_4^{12} = \lambda\,\Gamma_4^{11}\,. \tag{3.7}$$

Тогда

$$\omega_3^1 \wedge \omega_4^1 = 0 \tag{3.8}$$

и прямолинейная конгруэнция (A_3A_4) вырождается, что противоречит определению конгруэнции K.

Т е о р е м а IO. Торсы одного семейства прямолинейных конгруэнций (A_1A_4), (A_2A_4), ассоциированных с конгруэнцией K, соответствуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, уравнение

$$\omega_4^1 = 0 \tag{3.9}$$

определяет одно семейство торсов каждой из прямолинейных конгруэнций (A_1A_4) и (A_2A_4).

Л и т е р а т у р а.

I. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ. М., I956.

2. Малаховский В.С., Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_e. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып. I, (Труды Калининградского университета), I970, стр. 5-26.