УДК 681.3.07

С. И. Алешников, Ю. Ф. Болтнев, З. Език,
С. А. Ишанов, В. Куих

ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ И АВТОМАТЫ VII: ФОРМАЛЬНЫЕ РЯДЫ ДЕРЕВЬЕВ (Часть II)

Это восьмая статья в серии, дающей обзор некоторых разделов теории формальных языков и автоматов с использованием полуколец, формальных степенных рядов, матриц и теории неподвижных точек. Рассматриваются автоматы над деревьями (рядами деревьев) и системы уравнений над рядами деревьев. Основные темы статьи:

1. Магазинные автоматы над деревьями, состоянием которых являются ряды деревьев над полукольцом, к тому же алгебраические системы над рядами деревьев эквивалентны; более того, класс алгебраических рядов деревьев характеризуется алгебраическими выражениями рядов деревьев (результат Клини).

2. Класс распознаваемых рядов деревьев замкнут относительно недетерминированных элементарных трансдукций распознаваемых рядов деревьев.

3. Семейства распознаваемых и алгебраических рядов деревьев суть полные абстрактные семейства рядов деревьев (полные AFT-семейства).

4. Макростепенные ряды, любое обобщение индексированных языков и алгебраические степенные ряды суть в точности выходы алгебраических и распознаваемых рядов деревьев соответственно; для макростепенных рядов также имеет место результат Клини. Выходом полных абстрактных рядов деревьев является полное абстрактное семейство степенных рядов.

This is the eighth paper of a series of papers that will give a survey on several topics on formal languages and automata by using semirings, formal power series, matrices and fixed point theory. The seventh paper of this series deals with tree (series) automata and systems of equations over tree . The main topics of the paper are the following.

1. Pushdown tree automata, whose behaviors are tree series over a semiring, and algebraic tree systems are equivalent; moreover, the class of algebraic tree series is characterized by algebraic tree series expressions (a Kleene result).

2. The class of recognizable tree series is closed under nondeterpministic simple recognizable tree series transductions.

3. The families of recognizable tree series and of algebraic tree series are full abstract families of tree series (full AFTs).

4. The macro power series, a generalization of the indexed languages, and the algebraic power series are exactly the yields of algebraic tree series and of recognizable tree series, respectively; there is a Kleene result for macro power series; the yield of a full AFT is a full abstract family of power series.

Ключевые слова: формальный язык, автомат, автомат над деревьями, полукольцо, формальные ряды деревьев.

Key words: formal languages, automaton, tree automaton, semiring, formal tree series.

Это вторая часть последней статьи [7] настоящей серии. Нумерация глав и теорем продолжает нумерацию первой части [7]. Предполагается, что читатель знаком с частями I—VI [1—6] нашей серии.

В главе 5 вводятся магазинные автоматы над деревьями и алгебраические системы над деревьями и показывается, что оба эти механизма эквивалентны. Кроме того, доказывается теорема Клини для алгебраических рядов деревьев.

Трансдукторы нисходящего типа («top-down») над рядами деревьев вводятся в главе 6. Мы сосредоточимся на (нисходящих) недетерминированных простых распознаваемых трансдукторах над рядами деревьев и докажем, что они сохраняют распознаваемость рядов деревьев. Полными абстрактными семействами рядов деревьев (кратко — полными AFT-семействами) являются семейства рядов деревьев, замкнутые относительно недетерминированных простых распознаваемых трансдукций над рядами деревьев и некоторых специальных «рациональных» операций.

Эти полные AFT-семейства вводятся в главе 7. Показывается, что семейства распознаваемых рядов деревьев семейства алгебраических рядов деревьев — полные AFT-семейства.

Последняя глава показывает связи формальных рядов деревьев с формальными степенными рядами. Сначала мы показываем, что макростепенные ряды (обобщение индексированных языков) — в точности выход алгебраических рядов деревьев. Кроме того, мы доказываем теорему Клини для макростепенных рядов (и индексированных языков). Затем мы показываем, что алгебраические степенные ряды являются в точности выходом распознаваемых рядов деревьев. Наконец, мы доказываем важный результат, что выход полного AFT-семейства образует полное абстрактное семейство степенных рядов.

Изложение в настоящей статье следует работе [26].

5. Магазинные автоматы над деревьями, алгебраические системы над деревьями и теорема Клини

В этом разделе мы рассмотрим магазинные автоматы над деревьями и алгебраические системы над деревьями. Кроме того, докажем теорему Клини, следуя [17].

В [36] введено понятие магазинного автомата над деревьями (нисходящего типа) и показано, что этот магазинный автомат в точности распознает класс контекстно-свободных языков над деревьями. Здесь язык над деревьями называется контекстно-свободным, если он порождается контекстно-свободной грамматикой над деревьями (используя OI-метод вывода). Кроме того, там показано, что магазинные автоматы над деревьями эквивалентны ограниченным магазинным автоматам над деревьями, то есть магазинным автоматам, магазинная память которых линейна.

В [44] обобщены результаты [36] на формальные ряды деревьев. Определены магазинные автоматы над деревьями, поведениями которых являются формальные ряды деревьев, и показано, что класс поведений этих магазинных автоматов совпадает с классом алгебраических рядов деревьев. Здесь ряд деревьев называется алгебраическим, если он — начальная компонента наименьшего решения алгебраической системы над деревьями с начальной функциональной переменной. Эти алгебраические системы над деревьями выступают обобщением контекстно-свободных грамматик над деревьями (см. [49] и [31]). Имеем частный случай систем второго порядка из [17]. Настоящее изложение следует работе [44].

Магазинный автомат над деревьями (с входным алфавитом Σ и алфавитом листьев X) над полукольцом A

$$\mathfrak{P} = (Q, \Gamma, Z, Y, M, S, p_0, P)$$

задается посредством:

(i) конечного непустого множества Q *состояний*;

(ii) конечного упорядоченного алфавита $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{\bar{m}}$ *символов магазина*;

(iii) конечного алфавита $Z = \{z_1, \ldots, z_{\bar{m}}\}$ *переменных магазина*;

(iv) конечного алфавита $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ *переменных*;

(v) *матрицы переходов магазина над деревьями* M *порядка* k;

(vi) $S \in (A\langle T_\Sigma(X \cup Y_1)\rangle)^{1\times Q}$, где $S_q = d_q y_1$; $d_q \in A$; $q \in Q$, называемого *вектором начальных состояний*;

(vii) $p_0 \in \Gamma_0$, называемого *начальным символом магазина*;

(viii) конечного семейства $P = (P_{g(z_1,\ldots,z_m)} \mid g \in \Gamma_m,\ 0 \leqslant m \leqslant \bar{m})$ *векторов конечных состояний*

$P_{g(z_1,\ldots,z_m)} \in (A\langle T_\Sigma(X)\rangle)^{Q\times 1}$, $g \in \Gamma_m$, $0 \leqslant m \leqslant \bar{m}$.

Здесь *матрица переходов магазина над деревьями порядка* k есть матрица

$$M \in ((A\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle)^{Q\times Q^k})^{T_\Gamma(Z)\times T_\Gamma(Z)^k},$$

удовлетворяющая следующим двум условиям:

(i) для всех $t, t_1, \ldots, t_k \in T_\Gamma(Z)$

$$M_{t,(t_1,\ldots,t_k)} = \begin{cases} \sum M_{g(z_1,\ldots,z_m),(v_1(z_1,\ldots,z_m),\ldots,v_k(z_1,\ldots,z_m))}, \\ \qquad \text{где суммирование производится по всем} \\ \qquad v_1,\ldots,v_k \in T_\Gamma(Z_m) \text{ таким, что} \\ \qquad t_j = v_j(u_1,\ldots,u_m),\ 1 \leqslant j \leqslant k, \\ \text{если } t = g(u_1,\ldots,u_m),\ g \in \Gamma_m, \\ \qquad u_1,\ldots,u_m \in T_\Gamma(Z_m)\,; \\ 0 \quad \text{в противном случае}\,; \end{cases}$$

(ii) M конечна по числу строк, то есть для каждого $g \in \Gamma_m$, $0 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, существует лишь конечное число блоков $M_{g(z_1,\ldots,z_m),(v_1,\ldots,v_k)}$, $v_1,\ldots,v_k \in T_\Gamma(Z_m)$, которые не равны 0.

Заметим, что если корень t обозначен меткой $g \in \Gamma_m$, то $M_{t,(t_1,\ldots,t_k)} \neq \neq 0$ влечет $t, t_1, \ldots, t_k \in T_\Gamma(Z_m)$.

Неформально определение матрицы переходов магазина над деревьями означает, что действие магазинного автомата с деревом $t = g(u_1,\ldots,u_m)$ на свою магазинную память зависит только от метки g корня дерева t. Заметим, что матрица переходов магазина над деревьями порядка k определена конечным числом ненулевых блоков вида $M_{g(z_1,\ldots,z_m),(v_1,\ldots,v_k)}$, $g \in \Gamma_m$.

Заметим, что наше определение магазинного автомата над деревьями несколько отличается от определения, данного в [44]: здесь M — последовательность матриц переходов магазина над деревьями. Но согласно замечанию, данному после определения автомата над деревьями в разделе 3, оба типа магазинных автоматов над деревьями эквивалентны относительно их поведений.

Пусть теперь $Z_Q = \{(z_i)_q \mid 1 \leqslant i \leqslant \bar{m},\ q \in Q\}$ — алфавит переменных, и обозначим $Z_Q^m = \{(z_i)_q \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ q \in Q\}$, $1 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, $Z_Q^0 = \emptyset$. Определим $F \in ((A\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle)^{Q\times 1})^{T_\Gamma(Z)\times 1}$ ее элементами следующим образом:

(i) $(F_t)_q = (P_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q$, $t = g(u_1,\ldots,u_m)$, $g \in \Gamma_m$, $0 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, $u_1,\ldots,u_m \in T_\Gamma(Z_m)$, $q \in Q$;

(ii) $(F_{z_i})_q = (z_i)_q$, $1 \leqslant i \leqslant \bar{m}$, $q \in Q$;

(iii) $(F_t)_q = 0$ в противном случае.

Следовательно, F_{z_i}, $1 \leqslant i \leqslant \bar{m}$, — вектор-столбец размерности Q, чей q-й элемент, $q \in Q$, есть переменная $(z_i)_q$.

Аппроксимирующая последовательность $(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$, $\tau^j \in \in ((A\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle)^{Q\times 1})^{T_\Gamma(Z)\times 1}$, $j \geqslant 0$, *ассоциированная с* $\mathfrak{P}$, определяется следующим образом:

$$\tau^0 = 0, \qquad \tau^{j+1} = M(\tau^j,\ldots,\tau^j) + F, \quad j \geqslant 0\,.$$

Это означает, что для всех $t \in T_\Gamma(Z)$ блок векторов τ_t^j в τ^j определяется как

$$\tau_t^0 = 0, \quad \tau_t^{j+1} = \sum_{t_1,\ldots,t_k \in T_\Gamma(Z)} M_{t,(t_1,\ldots,t_k)}(\tau_{t_1}^j, \ldots, \tau_{t_k}^j) + F_t,\ j \geqslant 0\,.$$

Кроме того, для всех $t \in T_\Gamma(Z)$, $q \in Q$,

$$\begin{aligned}
&(\tau_t^0)_q = 0\,,\\
&(\tau_t^{j+1})_q = \textstyle\sum_{t_1,\ldots,t_k \in T_\Gamma(Z)} \sum_{q_1,\ldots,q_k \in Q}\\
&\qquad\qquad (M_{t,(t_1,\ldots,t_k)})_{q,(q_1,\ldots,q_k)}((\tau_{t_1}^j)_{q_1}, \ldots, (\tau_{t_k}^j)_{q_k}) + (F_t)_q\ j \geqslant 0\,.
\end{aligned}$$

Следовательно, для всех $g \in \Gamma_m$, $0 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, и всех $u_1, \ldots, u_m \in$ $\in T_\Gamma(Z_m)$ получим, что для всех $j \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\tau_{g(u_1,\ldots,u_m)}^{j+1} = &\textstyle\sum_{v_1,\ldots,v_k \in T_\Gamma(Z_m)}\\
&M_{g(z_1,\ldots,z_m),(v_1,\ldots,v_k)}(\tau_{v_1(u_1,\ldots,u_m)}^j, \ldots, \tau_{v_k(u_1,\ldots,u_m)}^j)\\
&+P_{g(z_1,\ldots,z_m)}
\end{aligned}$$

и

$$\tau_{z_i}^{j+1} = F_{z_i}, \quad z_i \in Z\,.$$

Пусть $\tau \in ((A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle\rangle)^{Q\times 1})^{T_\Gamma(Z)\times 1}$ — наименьшая верхняя грань аппроксимирующей последовательности, ассоциированной с $\mathfrak{P}$. Тогда *поведение* $||\mathfrak{P}||$ магазинного автомата над деревьями $\mathfrak{P}$ определим как

$$||\mathfrak{P}|| = S(\tau_{p_0}) = \sum_{q \in Q} S_q((\tau_{p_0})_q) = \sum_{q \in Q} d_q(\tau_{p_0})_q\,.$$

Заметим, что $||\mathfrak{P}||$ — ряд деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. Кроме того, заметим, что $(\tau_t)_q \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle\rangle$, $t \in T_\Gamma(Z)$, $q \in Q$, индуцирует отображение из $(A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle\rangle)^{\bar{m}|Q|}$ в $A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle\rangle$.

Построим теперь полиномиальный автомат над деревьями $\mathfrak{A}$, который будет иметь то же поведение, что и магазинный автомат над деревьями $\mathfrak{P}$. Пусть $\hat{M} \in (A\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle)^{(T_\Gamma(Z)\times Q)\times(T_\Gamma(Z)\times Q)^k}$ и $\hat{F} \in (A\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle)^{(T_\Gamma(Z)\times Q)\times 1}$ — изоморфные копии M и F соответственно. Заметим, что $\hat{M}$ конечна по строкам. Кроме того, определим $\hat{S} \in (A\langle T_\Sigma(X \cup Y_1)\rangle)^{1\times(T_\Gamma(Z)\times Q)}$ посредством $\hat{S}_{(p_0,q)} = S_q$, $\hat{S}_{(t,q)} = 0$, $t \neq p_0$, $q \in Q$. Определим полиномиальный автомат над деревьями $\mathfrak{A}$ с входным алфавитом Σ и алфавитом листьев $X \cup Z_Q$ как

$$\mathfrak{A} = (T_\Gamma(Z) \times Q, \hat{M}, \hat{S}, \hat{F})\,.$$

Тогда ясно, что $||\mathfrak{A}|| = ||\mathfrak{P}||$, то есть наш магазинный автомат над деревьями подходит под общее определение полиномиального автомата над деревьями, но по техническим причинам мы предпочитаем работать с матрицей переходов M в $((A\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle)^{Q\times Q^k})^{T_\Gamma(Z)\times T_\Gamma(Z)^k}$ и с вектором начальных состояний F в $((A\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q)\rangle)^{Q\times 1})^{T_\Gamma(Z)\times 1}$.

Очевидно, это означает, что все понятия, относящиеся к автоматам над деревьями (например, простой автомат над деревьями), являются также понятиями, относящимися к магазинным автоматам над деревьями.

Заметим, что мы адаптировали определение магазинного автомата над деревьями, данное в [44], так, чтобы оно подпадало под общее определение полиномиального автомата над деревьями.

Рассмотрим теперь полиномиальную систему, построенную из $\mathfrak{A}$ в доказательстве теоремы 3.3, и перенесем ее изоморфно на систему, которая соответствует $\mathfrak{P}$, то есть

$$y = M(y, \ldots, y) + F\,. \qquad (*)$$

Здесь $y \in (\{(y_t)_q \mid t \in T_\Gamma(Z),\ q \in Q\}^{Q\times 1})^{T_\Gamma(Z)\times 1}$ — вектор переменных $(y_t)_q$, $t \in T_\Gamma(Z)$, $q \in Q$, такой, что $(y_t)_q$ есть t-q-й элемент вектора y. Уравнения линейной системы $(*)$ в блочной нотации для $t \in T_\Gamma(Z)$

$$y_t = \sum_{t_1,\ldots,t_k \in T_\Gamma(Z)} M_{t,(t_1,\ldots,t_k)}(y_{t_1}, \ldots, y_{t_k}) + F_t\,,$$

где y_t — вектор размерности $Q \times 1$, чей q-й элемент есть переменная $(y_t)_q$, $q \in Q$; и для $t \in T_\Gamma(Z)$, $q \in Q$,

$$\begin{aligned}(y_t)_q = {}& \textstyle\sum_{t_1,\ldots,t_k \in T_\Gamma(Z)} \sum_{q_1,\ldots,q_k \in Q} \\ & (M_{t,(t_1,\ldots,t_k)})_{q,(q_1,\ldots,q_k)}((y_{t_1})_{q_1}, \ldots, (y_{t_k})_{q_k}) + (F_t)_q\,.\end{aligned}$$

Следовательно, для всех $g \in \Gamma_m$, $0 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, и всех $u_1, \ldots, u_m \in T_\Gamma(Z_m)$ уравнения в матричной форме записи

$$\begin{aligned}y_{g(u_1,\ldots,u_m)} = {}& \textstyle\sum_{v_1,\ldots,v_k \in T_\Gamma(Z_m)} \\ & M_{g(z_1,\ldots,z_m),(v_1,\ldots,v_k)}(y_{v_1(u_1,\ldots,u_m)}, \ldots, y_{v_k(u_1,\ldots,u_m)}) \\ & + P_{g(z_1,\ldots,z_m)}\end{aligned}$$

и для $z_i \in Z$

$$y_{z_i} = F_{z_i}\,.$$

Здесь $v_i(u_1, \ldots, u_m)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, обозначает $v_i[u_j/z_j,\ 1 \leqslant j \leqslant m]$. Наименьшее решение этой полиномиальной системы есть наименьшая верхняя грань аппроксимирующей последовательности, ассоциированной с $\mathfrak{P}$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий понятия, связанные с магазинными автоматами над деревьями. Этот пример принадлежит [36], пример 3, и приводился уже в работе [44].

Пример 5.1. Магазинный автомат над деревьями M в примере 3 из [36] определяется согласно нашей концепции следующим образом: входной алфавит $F = \{b, c_1, c_2\}$, $\mathrm{ar}(b) = 2$, $\mathrm{ar}(c_i) = 0$, $i = 1, 2$; X — пустое множество. $\mathfrak{P} = (Q, \Gamma, \{z\}, \{y_1, y_2\}, M, S, Z_0, P)$, где $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Gamma = \{G, C, Z_0\}$, $\mathrm{ar}(G) = 1$, $\mathrm{ar}(C) = \mathrm{ar}(Z_0) = 0$, $P = (P_C, P_{Z_0}, P_{G(z)})$, и матрица переходов магазина M порядка 2 определяется как

(0) $(M_{Z_0,(G(C),Z_0)})_{q_0,(q_0,q_0)} = y_1$,

(1) $(M_{G(z),(G(G(z)),G(z))})_{q_0,(q_0,q_0)} = y_1$,

(2) $(M_{G(z),(z,z)})_{q_0,(q_1,q_2)} = b(y_1, y_2)$,

(3) $(M_{G(z),(z,z)})_{q_i,(q_i,q_i)} = b(y_1, y_2)$, $i = 1, 2$,

(4) $(P_C)_{q_i} = c_i$, $i = 1, 2$.

Все другие элементы в Z_0, C и $G(z)$ блоки строк в M_1 и M_2 равны нулю. Кроме того, $(P_C)_{q_0} = 0$ и $P_{Z_0} = 0$, $P_{G(z)} = 0$. Далее, $S_{q_0} = y_1$, $S_{q_1} = S_{q_2} = 0$.

Существенные элементы векторов аппроксимирующей последовательности, ассоциированной с $\mathfrak{P}$, определяются следующим образом для всех $u \in T_\Gamma(\{z\})$ и $j \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
&(\tau^{j+1}_{Z_0})_{q_0} = (\tau^{j}_{G(C)})_{q_0}, \qquad (\tau^{j+1}_{Z_0})_{q_i} = 0,\ i = 1, 2\,,\\
&(\tau^{j+1}_{C})_{q_0} = 0,\ (\tau^{j+1}_{C})_{q_i} = c_i,\ i = 1, 2\,,\ (\tau^{j+1}_{z})_{q_i} = z_{q_i},\ i = 0, 1, 2\,,\\
&(\tau^{j+1}_{G(u)})_{q_0} = (\tau^{j}_{G(G(u))})_{q_0} + b((\tau^{j}_{u})_{q_1}, (\tau^{j}_{u})_{q_2})\,,\\
&(\tau^{j+1}_{G(u)})_{q_i} = b((\tau^{j}_{u})_{q_i}, (\tau^{j}_{u})_{q_i}),\ i = 1, 2\,.
\end{aligned}$$

Пусть $G^k(C) \in T_\Gamma(\emptyset)$ определена как $G^0(C) = C$, $G^{k+1}(C) = G(G^k(C))$, $k \geqslant 0$, и рассмотрим уравнения для $G^k(C)$, $k \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
&(\tau^{j+1}_{G^0(C)})_{q_0} = 0,\ (\tau^{j+1}_{G^0(C)})_{q_i} = c_i\,,\\
&(\tau^{j+1}_{G^k(C)})_{q_0} = (\tau^{j}_{G^{k+1}(C)})_{q_0} + b((\tau^{j}_{G^{k-1}(C)})_{q_1}, (\tau^{j}_{G^{k-1}(C)})_{q_2})\,, \quad k \geqslant 1\,,\\
&(\tau^{j+1}_{G^k(C)})_{q_i} = b((\tau^{j}_{G^{k-1}(C)})_{q_i}, (\tau^{j}_{G^{k-1}(C)})_{q_i})\,, \quad k \geqslant 1\,.
\end{aligned}$$

Пусть $\tau = \sup(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$. Тогда для $k \geqslant 1$, $i = 1, 2$, $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&(\tau_{G^0(C)})_{q_0} = 0,\ (\tau_{G^0(C)})_{q_i} = c_i\,,\\
&(\tau_{G^k(C)})_{q_0} = (\tau_{G^{k+1}(C)})_{q_0} + b((\tau_{G^{k-1}(C)})_{q_1}, (\tau_{G^{k-1}(C)})_{q_2})\,,\\
&(\tau_{G^k(C)})_{q_i} = b((\tau_{G^{k-1}(C)})_{q_i}, (\tau_{G^{k-1}(C)})_{q_i})\,.
\end{aligned}$$

К тому же $(\tau_{Z_0})_{q_0} = (\tau_{G(C)})_{q_0}$.

Следовательно, $(\tau_{G^k(C)} \mid k \geqslant 0)$ есть наименьшее решение *полиномиальной* системы

$$
\begin{aligned}
&(z_0)_{q_0} = 0, \quad (z_0)_{q_i} = c_i,\ i = 1,2\,,\\
&(z_k)_{q_0} = (z_{k+1})_{q_0} + b((z_{k-1})_{q_1}, (z_{k-1})_{q_2})\,, \quad k \geqslant 1\,,\\
&(z_k)_{q_i} = b((z_{k-1})_{q_i}, (z_{k-1})_{q_i})\,, \quad i = 1,2,\ k \geqslant 1\,.
\end{aligned}
$$

По теореме 3.2 $(\tau_{G^k(C)} \mid k \geqslant 0)$ также наименьшее решение системы

$$
\begin{aligned}
&(z_0)_{q_0} = 0, \quad (z_0)_{q_i} = c_i,\ i = 1,2\,,\\
&(z_k)_{q_0} = \textstyle\sum_{j \geqslant k-1} b((z_j)_{q_1}, (z_j)_{q_2})\,, \quad k \geqslant 1\,,\\
&(z_k)_{q_i} = b((z_{k-1})_{q_i}, (z_{k-1})_{q_i})\,, \quad i = 1,2,\ k \geqslant 1\,.
\end{aligned}
$$

Эта система *собственная* и имеет единственное решение $(\tau_{G^k(C)} \mid k \geqslant 0)$. Заметим, что эта система *не является* полиномиальной.

Определим теперь деревья $t_i^j \in T_F(\emptyset)$, $i = 1,2$, $j \geqslant 0$, как

$$
t_i^0 = c_i, \quad t_i^{j+1} = b(t_i^j, t_i^j),\ i = 1,2,\ j \geqslant 0\,.
$$

Пусть

$$
\begin{aligned}
&(s_0)_{q_0} = 0,\ (s_0)_{q_i} = c_i,\ i = 1,2\,,\\
&(s_k)_{q_0} = \textstyle\sum_{j \geqslant k-1} b(t_1^j, t_2^j),\ (s_k)_{q_i} = t_i^k,\ k \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

Тогда $((s_k)_{q_i} \mid k \geqslant 0,\ i = 0,1,2)$ — решение этой собственной системы и, следовательно, $(s_k)_{q_i} = (\tau_{G^k(C)})_{q_i}$, $k \geqslant 0$, $i = 0,1,2$. Поскольку $||\mathfrak{P}|| = (\tau_{Z_0})_{q_0} = (\tau_{G(C)})_{q_0}$, то мы заключаем, что $||\mathfrak{P}|| = (s_1)_{q_0} = \sum_{j \geqslant 0} b(t_1^j, t_2^j)$.

Этот пример показывает также метод математически строгого доказательства того, что поведение магазинного автомата над деревьями равно некоторому формальному ряду деревьев. □

Обратимся теперь к результату о магазинных автоматах над деревьями, который аналогичен теореме 6.2 [37] для магазинных автоматов. Неформально он утверждает, что вычисления магазинного автомата над деревьями под управлением магазинной памяти с содержимым $t(u_1, \ldots, u_m)$ (то есть $\tau_{t(u_1,\ldots,u_m)}$), где $t(z_1, \ldots, z_m) \in T_\Gamma(Z_m)$ и $u_i \in T_\Gamma(Z_m)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, есть не что иное, как вычисления под управлением магазинной памяти с содержимым $t(z_1, \ldots, z_m)$ (то есть $\tau_{t(z_1,\ldots,z_m)}$), примененные к вычислениям под управлением магазинной памяти с содержимым $u_1, \ldots, u_m$ (то есть $\tau_{t(z_1,\ldots,z_m)}[\tau_{u_i}/F_{z_i}, 1 \leqslant i \leqslant m]$).

Теорема 5.1 ([44], теорема 3.5). *Пусть* τ *— наименьшее решение полиномиальной линейной системы* $(*)$. *Тогда для всех* $t(z_1, \ldots, z_m) \in T_\Gamma(Z_m)$, $1 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, *и* $u_i \in T_\Gamma(Z_m)$, $1 \leqslant i \leqslant m$*:*

$$
\tau_{t(u_1,\ldots,u_m)} = \tau_{t(z_1,\ldots,z_m)}[\tau_{u_i}/F_{z_i}, 1 \leqslant i \leqslant m]\,.
$$

Введем теперь алгебраические системы над деревьями. Определения следуют работе [44]. Пусть $\Phi = \{G_1, \ldots, G_n\}$, $\Phi \cap \Sigma = \emptyset$, — конечный упорядоченный алфавит *функциональных переменных*, где G_i имеет ранг r_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\bar{m} = \max\{r_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Пусть $D = A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_{r_1})\rangle\rangle \times \ldots \times A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_{r_n})\rangle\rangle$ и рассмотрим ряд деревьев $s_i \in A\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_{r_i})\rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда каждый s_i индуцирует функцию $\bar{s}_i : D \to A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_{r_i})\rangle\rangle$. Для $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in D$ определим по индукции $\bar{s}_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ как

(i) z_m, если $s_i = z_m$, $1 \leqslant m \leqslant r_i$, x, если $s_i = x$, $x \in X$,

(ii) $\bar{\omega}(\bar{t}_1(\tau_1, \ldots, \tau_n), \ldots, \bar{t}_r(\tau_1, \ldots, \tau_n))$, если $s_i = \omega(t_1, \ldots, t_r)$, $\omega \in \Sigma_r$, $t_1, \ldots, t_r \in T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_{r_i})$,

(iii) $\tau_j(\bar{t}_1(\tau_1, \ldots, \tau_n), \ldots, \bar{t}_{r_j}(\tau_1, \ldots, \tau_n))$, если $s_i = G_j(t_1, \ldots, t_{r_j})$, $G_j \in \Phi$, $t_1, \ldots, t_{r_j} \in T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_{r_i})$,

(iv) $a\bar{t}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, если $s_i = at$, $a \in A$, $t \in T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_{r_i})$,

(v) $\sum_{j\in J} \bar{r}_j(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, если $s_i = \sum_{j\in J} r_j$, $r_j \in A\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_{r_i})\rangle\rangle$, $j \in J$, для произвольного множества индексов J.

Отображения $\bar{s}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и отображение $\bar{s} : D \to D$, где $\bar{s} = \langle\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\rangle$, непрерывны. Это может быть показано для $s_i \in T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_r)$ индукцией по структуре s_i. Если s_i имеет вид $G_j(t_1, \ldots, t_{r_j})$, то непрерывность $\bar{s}_i$ следует из непрерывности подстановки, как показано предложением 2.5. Поскольку скалярное умножение непрерывно, то отсюда следует, что каждое $s_i = at$, где $a \in A$ и $t \in T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_r)$, также индуцирует непрерывную функцию. Общий случай $s_i \in A\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_r)\rangle\rangle$ теперь может быть доказан, используя тот факт, что суммирование сохраняет наименьшую верхнюю грань направленного множества. Следовательно, $\bar{s}$ имеет наименьшую неподвижную точку в D (см. также леммы 4.24 и 4.3 в [35], леммы 3.1 и 3.2 в [24], [12], [25], [44], лемма 3.6). В некоторых ситуациях формулы читаются легче, если мы используем обозначения $s_i[\tau_1/G_1, \ldots, \tau_n/G_n]$ вместо обозначений $\bar{s}_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Алгебраическая система над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, E)$ (с *функциональными переменными* в Φ, *переменными* в Z и *терминальными символами* в Σ) содержит множество E *формальных уравнений*

$$G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = s_i(z_1, \ldots, z_{r_i}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,,$$

где каждое s_i лежит в $A\langle T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_{r_i})\rangle$. *Решение* алгебраической системы над деревьями $\mathfrak{S}$ задано посредством $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in D$ такого, что $\tau_i = \bar{s}_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то есть произвольной неподвижной точкой $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ набора $\bar{s} = \langle\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\rangle$. Решение $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ алгебраической системы над деревьями $\mathfrak{S}$ называется *наименьшим решением*, если $\sigma_i \sqsubseteq \tau_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для всех решений $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ системы $\mathfrak{S}$. Поскольку наименьшее решение системы $\mathfrak{S}$ есть не что иное, как наименьшая неподвижная точка $\bar{s} = \langle \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n \rangle$, то наименьшее решение алгебраической системы $\mathfrak{S}$ существует в D (см. [56], раздел 1.5).

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, \{G_i = s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\})$ *— алгебраическая система над деревьями, где* $s_i \in A\langle T_{\Sigma\cup\Phi}(X \cup Z_{r_i})\rangle$. *Наименьшее решение этой алгебраической системы* $\mathfrak{S}$ *существует в* D *и равно*

$$\mathrm{fix}(\bar{s}) = \sup(\bar{s}^j(0) \mid j \in \mathbb{N}),$$

где $\bar{s}^j$ *—* j*-я итерация отображения* $\bar{s} = \langle \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n \rangle : D \to D$, *а* $\bar{s}^0$ *— тождественное отображение.*

Теорема 5.2 показывает, как мы можем вычислить аппроксимацию наименьшего решения алгебраической системы над деревьями. *Аппроксимирующая последовательность* $(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$, где каждое $\tau^j \in D$, *ассоциированная с* алгебраической системой над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, \{G_i = s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\})$, определяется следующим образом:

$$\tau^0 = 0, \quad \tau^{j+1} = \bar{s}(\tau^j),\ j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\tau^j = \bar{s}^j(0)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то наименьшее решение $\mathrm{fix}(\bar{s})$ системы $\mathfrak{S}$ равно $\sup(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$. Алгебраическая система над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi_0, Z, \Sigma, \{G_i = s_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}, G_0)$ (с функциональными переменными в $\Phi_0 = \{G_0, G_1, \ldots, G_n\}$, переменными в Z, терминальными символами в Σ) с *начальной функциональной переменной* G_0 есть алгебраическая система над деревьями $(\Phi_0, Z, \Sigma, \{G_i = s_i \mid 0 \leqslant \leqslant i \leqslant n\})$ такая, что G_0 имеет ранг 0. Пусть $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ — наименьшее решение системы $(\Phi_0, Z, \Sigma, \{G_i = s_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\})$. Тогда τ_0 называется *начальной компонентой* наименьшего решения. Заметим, что $\tau_0 \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ не содержит переменных из Z.

Наши алгебраические системы над деревьями являются системами второго порядка в смысле [17] и являются обобщением контекстно-свободных грамматик над деревьями (см. [49] и [24], в особенности теорема 3.4, [56], раздел 1.5, [21], раздел 9.5).

Ряд деревьев в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ называется *алгебраическим*, если он является начальной компонентой наименьшего решения алгебраической системы над деревьями с начальной функциональной переменной. Совокупность всех таких начальных компонент обозначается через $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. На алфавиты Σ и X в определении алгебраических рядов деревьев ограничений не накладывается, то есть они могут быть бесконечными. Это обусловлено тем фактом, что для любого $s \in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ существуют конечные алфавиты Σ' и X', $\Sigma' \subseteq \Sigma$, $X' \subseteq X$, такие, что $\mathrm{supp}(s) \subseteq T_{\Sigma'}(X')$. Следовательно,

$$A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle = \bigcup_{\Sigma'\subseteq\Sigma \text{ конечное},\ X'\subseteq X \text{ конечное}} A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle.$$

Покажем теперь, как эквивалентная алгебраическая система над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi_0, Z_Q, \Sigma, E, y_0)$ с начальной функциональной переменной y_0 может быть построена из произвольного заданного магазинного автомата над деревьями $\mathfrak{P} = (Q, \Gamma, Z, Y, M, S, p_0, P)$ (построение следует работе [44]). Здесь $\Phi_0 = \{y_0\} \cup \{(y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q \mid g \in \Gamma_m,\ 0 \leqslant m \leqslant \bar{m},\ q \in Q\}$. Функциональная переменная $(y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q$, $g \in \Gamma_m$, $0 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, $q \in Q$, имеет ранг $m|Q|$. По определению, $Q \times 1$-вектор $y_{g(z_1,\ldots,z_m)}$, $g \in \Gamma_m$, $0 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, есть вектор-столбец с q-й компонентой $(y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q$, $q \in Q$.

Для описания формальных уравнений в E введем для $t \in T_\Gamma(Z_m)$, $1 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, векторы $\hat{y}_t$ в $(T_\Phi(Z_Q^m))^{Q\times 1}$ следующим образом:

$$\hat{y}_{g(u_1,\ldots,u_m)} = y_{g(z_1,\ldots,z_m)}(\hat{y}_{u_1}, \ldots, \hat{y}_{u_m})\,,$$
$$g \in \Gamma_m,\ u_1, \ldots, u_m \in T_\Gamma(Z_m),\ 1 \leqslant m \leqslant \bar{m}\,;$$
$$\hat{y}_g = y_g,\ g \in \Gamma_0\,; \quad (\hat{y}_{z_i})_q = (z_i)_q,\ 1 \leqslant i \leqslant \bar{m},\ q \in Q\,.$$

Записанное покомпонентно, первое уравнение читается как

$$(\hat{y}_{g(u_1,\ldots,u_m)})_q = (y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q((\hat{y}_{u_i})_{q'},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ q' \in Q)$$

для $g \in \Gamma_m$, $u_1, \ldots, u_m \in T_\Gamma(Z_m)$, $1 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, $q \in Q$. Заметим, что

$$(\hat{y}_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q = (y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q((z_i)_{q'},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ q' \in Q)$$

для $g \in \Gamma_m$, $1 \leqslant m \leqslant \bar{m}$, $q \in Q$. Далее, $y_{g(z_1,\ldots,z_m)}(\hat{y}_{u_1}, \ldots, \hat{y}_{u_m})$ означает $y_{g(z_1,\ldots,z_m)}[\hat{y}_{u_i}/F_{z_i},\ 1 \leqslant i \leqslant m]$ и $(y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q((\hat{y}_i)_{q'},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ q' \in Q)$ означает $(y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q[(\hat{y}_i)_{q'}/(z_i)_{q'},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ q' \in Q]$. Формальные уравнения в E даны теперь в матричных обозначениях:

$$\begin{aligned}
&y_0 = S(y_{p_0})\,,\\
&y_{g(z_1,\ldots,z_m)}((z_i)_{q'},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ q' \in Q) = \qquad (**)\\
&\quad = (M(\hat{y}, \ldots, \hat{y}) + F)_{g(z_1,\ldots,z_m)} =\\
&\quad = \textstyle\sum_{t_1,\ldots,t_k \in T_\Gamma(Z_m)} M_{g(z_1,\ldots,z_m),(t_1,\ldots,t_k)}(\hat{y}_{t_1}, \ldots, \hat{y}_{t_k}) + P_{g(z_1,\ldots,z_m)},\\
&\qquad\qquad g \in \Gamma_m,\ 0 \leqslant m \leqslant \bar{m}\,.
\end{aligned}$$

Зададим теперь явно формальные уравнения, за исключением первого, с индексом $q \in Q$.

$$\begin{aligned}
&(y_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q((z_i)_{q'},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ q' \in Q) =\\
&= \textstyle\sum_{t_1,\ldots,t_k \in T_\Gamma(Z_m)} \sum_{q_1,\ldots,q_k \in Q}\\
&\quad (M_{g(z_1,\ldots,z_m),(t_1,\ldots,t_k)})_{q,(q_1,\ldots,q_k)}((\hat{y}_{t_1})_{q_1}, \ldots, (\hat{y}_{t_k})_{q_k}) + (P_{g(z_1,\ldots,z_m)})_q\,,\\
&\qquad\qquad g \in \Gamma_m,\ 0 \leqslant m \leqslant \bar{m},\ q \in Q\,.
\end{aligned}$$

Заметим, что индексация посредством $q \in Q$ требуется только в примерах. В теоретических рассмотрениях мы сохраняем индексацию посредством состояний $q, q_1, \ldots, q_n$.

Следующая теорема — ключевая для доказательства эквивалентности магазинных автоматов над деревьями и алгебраических систем над деревьями с начальной функциональной переменной.

Теорема 5.3 ([44], теорема 3.13). *Если τ — наименьшее решение полиномиальной линейной системы* $(*)$, *то* $(\tau_{g(z_1,\ldots,z_m)} \mid g \in \Gamma_m,$ $0 \leqslant m \leqslant \bar{m})$ — *наименьшее решение алгебраической системы над деревьями* $(**)$.

Следствие 5.4. *Начальная компонента наименьшего решения алгебраической системы над деревьями* $\mathfrak{S}$ *совпадает с* $||\mathfrak{P}||$.

Следствие 5.5. *Поведение магазинного автомата над деревьями есть алгебраический ряд деревьев.*

Пример 5.1 (продолжение). Построим теперь по шагам для магазинного автомата над деревьями $\mathfrak{P}$ алгебраическую систему над деревьями $\mathfrak{S}$ с начальной функциональной переменной так, что $||\mathfrak{P}||$ — начальная компонента ее наименьшего решения. Рассмотрим сначала линейную систему $(*)$ в виде

$$\hat{y} = M(\hat{y}, \hat{y}) + F$$

и запишем явно уравнения для $\hat{y}_{G(z)}$, $\hat{y}_{Z_0}$ и $\hat{y}_C$:

$$\begin{aligned}
&(\hat{y}_{G(z)})_{q_0} = (\hat{y}_{G(G(z))})_{q_0} + b((\hat{y}_z)_{q_1}, (\hat{y}_z)_{q_2}),\\
&(\hat{y}_{G(z)})_{q_i} = b((\hat{y}_z)_{q_i}, (\hat{y}_z)_{q_i}),\ i = 1, 2,\\
&(\hat{y}_{Z_0})_{q_0} = (\hat{y}_{G(C)})_{q_0}, \quad (\hat{y}_{Z_0})_{q_i} = 0,\ i = 1, 2,\\
&(\hat{y}_C)_{q_0} = 0, \quad (\hat{y}_C)_{q_i} = c_i,\ i = 1, 2\,.
\end{aligned}$$

Выразим теперь компоненты $\hat{y}$ через $y_{G(z)}$, y_{Z_0} и y_C, получим алгебраическую систему $(**)$:

$$\begin{aligned}
&(y_{G(z)})_{q_0}(z_{q_0}, z_{q_1}, z_{q_2}) = (y_{G(z)})_{q_0}((y_{G(z)})_{q_0}(z_{q_0}, z_{q_1}, z_{q_2}),\\
&\qquad (y_{G(z)})_{q_1}(z_{q_0}, z_{q_1}, z_{q_2}), (y_{G(z)})_{q_2}(z_{q_0}, z_{q_1}, z_{q_2})) + b(z_{q_1}, z_{q_2}),\\
&(y_{G(z)})_{q_i}(z_{q_0}, z_{q_1}, z_{q_2}) = b(z_{q_i}, z_{q_i}),\ i = 1, 2,\\
&(y_{Z_0})_{q_0} = (y_{G(z)})_{q_0}((y_C)_{q_0}, (y_C)_{q_1}, (y_C)_{q_2}),\\
&(y_{Z_0})_{q_i} = 0,\ i = 1, 2,\\
&(y_C)_{q_0} = 0,\\
&(y_C)_{q_i} = c_i,\ i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Алгебраическая система над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi_0, Z, F, E, y_0)$ описывается теперь через

$$\Phi_0 = \{(y_{G(z)})_{q_i}, (y_{Z_0})_{q_i}, (y_C)_{q_i} \mid i = 0, 1, 2\} \cup \{y_0\},$$

где ранги переменных $(y_{G(z)})_{q_i}$, $(y_{Z_0})_{q_i}$, $(y_C)_{q_i}$ равны $3, 0, 0$ соответственно для $i = 0, 1, 2$; $Z = \{z_{q_0}, z_{q_1}, z_{q_2}\}$; E есть множество уравнений, описанное выше, дополненное добавочным $y_0 = (y_{Z_0})_{q_0}$.

Заметим, что построение $\mathfrak{P}$ из $\mathfrak{S}$ есть, в сущности, то же построение, что было дано в работе [36] в доказательстве теоремы 1. □

Обращение следствия 5.5 также может быть доказано и дает главный результат работы [44] и главный результат этой главы.

Теорема 5.6 ([44], следствие 3.17). *Следующие утверждения о формальных рядах деревьев s из $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ эквивалентны:*

(i) s — алгебраический ряд деревьев;

(ii) s — поведение магазинного автомата над деревьями;

(iii) s — поведение простого магазинного автомата над деревьями с одним начальным состоянием веса 1.

Заметим, что доказательство следствия 3.17 в [44] дано для магазинных автоматов над деревьями, определенных конечной последовательностью матриц переходов. Однако согласно замечанию, приведенному после определения автомата на деревьями в главе 3, это доказательство можно легко переписать для магазинных автоматов над деревьями в соответствии с нашим определением. Если базовое полукольцо есть $\mathbb{N}^\infty$, то есть если рассматриваются ряды деревьев в $\mathbb{N}^\infty\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, то можно вывести более сильные результаты.

Пусть $G = (\Phi, Z, \Sigma, R)$ — контекстно-свободная грамматика над деревьями, где $\Phi = \{G_1, \ldots, G_n\}$ и R — множество правил вывода

$$G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) \to t_i^j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Обозначим через $d_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, количество (возможно ∞) различных левосторонних выводов слова $t \in T_\Sigma(X \cup Z_{r_i})$ относительно G, начинающихся с G_i. Пусть $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, E)$ — алгебраическая система над деревьями, где E — система формальных уравнений

$$G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n_i} t_i^j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Теорема 5.7 ([17], теорема 11 ii). *Пусть $G = (\Phi, Z, \Sigma, R)$ и $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, E)$ — рассмотренные выше контекстно-свободная грамматика над деревьями и алгебраическая система над деревьями соответственно, а $d_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — количество (возможно ∞) различных левосторонних выводов слова $t \in T_\Sigma(X \cup Z_{r_i})$ относительно G, начинающихся с G_i. Тогда наименьшее решение системы $\mathfrak{S}$*

$$\Big(\sum_{t\in T_\Sigma(X\cup Z_{r_i})} d_i(t)t \mid 1 \leqslant i \leqslant n \Big)\,.$$

Теоремы 5.7, 3.1 и следствие 5.6 дают следующую теорему.

Теорема 5.8. *Пусть $d : T_\Sigma(X) \to \mathbb{N}^\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) Существует контекстно-свободная грамматика над деревьями с начальной функциональной переменной, терминальным алфавитом Σ и алфавитом листьев X такая, что количество (возможно ∞) различных левосторонних выводов слова $t \in T_\Sigma(X)$ из начальной функциональной переменной определяется величиной $d(t)$.

(ii) *Существует 1-простой магазинный автомат над деревьями с входным алфавитом Σ и алфавитом листьев X такой, что количество (возможно ∞) различных шагов вычислений для принятия $t \in T_\Sigma(X)$ определяется величиной $d(t)$.*

Контекстно-свободная грамматика над деревьями с начальной функциональной переменной, терминальным алфавитом Σ и алфавитом листьев X называется *однозначной*, если для всех $t \in T_\Sigma(X)$ количество различных левосторонних выводов слова t относительно G равно либо 1, либо 0. 1-простой магазинный автомат над деревьями с терминальным алфавитом Σ и алфавитом листьев X называется *однозначным*, если для всех $t \in T_\Sigma(X)$ количество различных шагов вычислений для принятия t равно либо 1, либо 0.

Следствие 5.9. *Пусть $L \subseteq T_\Sigma(X)$ — язык над деревьями. Тогда L порождается однозначной контекстно-свободной грамматикой над деревьями тогда и только тогда, когда $\sum_{t\in L} t$ — поведение однозначного 1-простого магазинного автомата над деревьями.*

Магазинный автомат над деревьями $\mathfrak{P} = (Q, \Gamma, Z, Y, M, S, p_0, P)$ называется *ограниченным*, если $\Gamma = \{p_0\} \cup \Gamma_1$, то есть за исключением начального символа магазина p_0 с рангом 0 все остальные символы магазина имеют ранг 1.

Следующая теорема дополняет список эквивалентных утверждений следствия 5.6.

Теорема 5.10 ([44], следствие 4.8). *Следующие утверждения о формальных рядах деревьев s в $A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ эквивалентны:*

(i) *s — алгебраический ряд деревьев;*

(ii) *s — поведение ограниченного магазинного автомата над деревьями;*

(iii) *s — поведение простого ограниченного магазинного автомата над деревьями.*

Вернемся теперь к формальным рядам деревьев в $\mathbb{N}^\infty\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.

Теорема 5.11. *Пусть $d : T_\Sigma(X) \to \mathbb{N}^\infty$. Тогда следующее утверждение эквивалентно утверждению теоремы 5.8:*

(iii) *Существует 1-простой ограниченный магазинный автомат над деревьями с входным алфавитом Σ и алфавитом листьев X такой, что количество (возможно ∞) различных шагов вычислений для принятия $t \in T_\Sigma(X)$ определяется величиной $d(t)$.*

Следствие 5.12. *Пусть $L \subseteq T_\Sigma(X)$ — язык над деревьями. Тогда L порождается однозначной контекстно-свободной грамматикой над деревьями, тогда и только тогда, когда $\sum_{t\in L} t$ — поведение однозначного 1-простого ограниченного магазинного автомата над деревьями.*

Докажем теорему Клини, следуя [17]. До конца статьи $\Phi_\infty = \{G_i \mid i \geqslant 0\}$ — бесконечный упорядоченный алфавит функциональных переменных, где G_i ранга r_i, $i \geqslant 0$, и для каждого $r \geqslant 0$ имеется бесконечное число функциональных переменных ранга r. Пусть $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}\}$ и $\hat{D} = A\langle\langle T_{\hat{\Sigma}}(X \cup Z_{r_{i_1}})\rangle\rangle \times \cdots \times A\langle\langle T_{\hat{\Sigma}}(X \cup Z_{r_{i_n}})\rangle\rangle$ для некоторых попарно различных $i_1, \ldots, i_n, k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$. Рассмотрим ряд деревьев $s \in A\langle\langle T_{\hat{\Sigma} \cup \{G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}\}}(X \cup Z_r)\rangle\rangle$ (функциональные переменные $G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}$ здесь — упорядоченные символы, как в Σ). Тогда s индуцирует функцию $\bar{s} : \hat{D} \to A\langle\langle T_{\hat{\Sigma}}(X \cup Z_r)\rangle\rangle$, как выше.

Рассмотрим алгебраическую систему над деревьями $\mathfrak{S} = (\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}\}, Z, \hat{\Sigma}, E)$, где E есть $G_{i_j}(z_1, \ldots, z_{r_{i_j}}) = s_j(z_1, \ldots, z_{r_{i_j}}, G_{i_1}, \ldots, G_{i_n})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и $s_j \in A\langle T_{\hat{\Sigma} \cup \{G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}\}}(X \cup Z_{r_{i_j}})\rangle$.

Наименьшее решение системы $\mathfrak{S}$ принадлежит $\hat{D}$. Совокупность компонент наименьших решений всех таких алгебраических систем (при свободном выборе попарно различных $i_1, \ldots, i_n, k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$) обозначим $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$. Заметим, что каждый степенной ряд в $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$ — фактически степенной ряд в $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z_r)\rangle\rangle$ для некоторого конечного $\Phi \subset \Phi_\infty$ и некоторого $r \geqslant 0$.

Перед доказательством применим некоторые результаты теории неподвижных точек непрерывных функций к алгебраическим системам над деревьями (см. «Предварительные сведения» в части II [2]). *Расширенная* алгебраическая система над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, E)$ и ее наименьшее решение определяются так же, как и алгебраическая система над деревьями и ее наименьшее решение, за исключением того, что правые части уравнений $G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = s_i(z_1, \ldots, z_{r_i})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, принадлежат теперь $A\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z_{r_i})\rangle\rangle$.

(1) *Параметрическое тождество.* Пусть $r \in A\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$ и обозначим $r' = \mu G.r$, $G \in \Phi_\infty$. Пусть $G_i \neq G$, $\tau_i \in A\langle\langle T_{\Sigma \cup (\Phi_\infty - \{G\})}(X \cup Z)\rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\sigma_j \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z)\rangle\rangle$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда $r'[\sigma_1/z_1, \ldots, \sigma_k/z_k, \tau_1/G_1, \ldots, \tau_n/G_n] = \mu G.(r[\sigma_1/z_1, \ldots, \sigma_k/z_k, \tau_1/G_1, \ldots, \tau_n/G_n])$.

(2) *Правило Бекича — де Беккера — Скотта.* Изучим уравнения $G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = s_i(z_1, \ldots, z_{r_i})$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $s_i \in A\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z_{r_i})\rangle\rangle$ расширенной алгебраической системы над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, E)$, $\Phi = \{G_1, \ldots, G_n\}$. Пусть $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, а $(\tau_{m+1}, \ldots, \tau_n)$ — наименьшее решение расширенной алгебраической системы над деревьями $\mathfrak{S}' = (\Phi', Z, \Sigma, E')$, где $\Phi' = \{G_{m+1}, \ldots, G_n\}$ и $E' = \{G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = s_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) \mid m+1 \leqslant i \leqslant n\}$. Поэтому $\tau_j \in A\langle\langle T_{\Sigma \cup \{G_1, \ldots, G_m\}}(X \cup Z_{r_j})\rangle\rangle$, $m+1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ — наименьшее решение расширенной алгебраической системы $\mathfrak{S}'' = (\Phi'', Z, \Sigma, E'')$, где $\Phi'' = \{G_1, \ldots, G_m\}$ и $E'' = \{G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = s_i(z_1, \ldots, z_{r_i})[\tau_{m+1}/G_{m+1}, \ldots, \tau_n/G_n] \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Тогда

$$(\tau_1, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}[\tau_1/G_1, \ldots, \tau_m/G_m], \ldots, \tau_n[\tau_1/G_1, \ldots, \tau_m/G_m])$$

является наименьшим решением исходной расширенной алгебраической системы над деревьями.

Продолжим теперь аналогично главе 4.

Теорема 5.13. $\langle A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle, +, 0, \bar{\Sigma}\cup\bar{\Phi}_\infty\rangle$ *— дистрибутивная* $\Sigma\cup\Phi_\infty$*-алгебра, содержащая* $A\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle$ *и замкнутая относительно скалярного умножения. Следовательно, для любого* $G\in\Phi_\infty$ *ранга* r *и любых* $\sigma_1,\ldots,\sigma_r\in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$ $\bar{G}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ *опять лежит в* $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$.

Доказательство. Докажем второе утверждение. Доказательство первого утверждения аналогично доказательству теоремы 4.1. Пусть $\sigma_1,\ldots,\sigma_r\in A\langle\langle T_{\Sigma\cup\{G_{k_1},\ldots,G_{k_m}\}}(X\cup\{z_1,\ldots,z_k\})\rangle\rangle$. Тогда существуют r алгебраических систем над деревьями $G_{tj}(z_1,\ldots,z_{i_{tj}})=s_{tj}$, $1\leqslant t\leqslant r$, $1\leqslant j\leqslant n_r$, где ранг G_{t1} равен k, таких, что первые компоненты их наименьших решений равны σ_t.

Рассмотрим теперь алгебраическую систему над деревьями.

$$\begin{aligned}&H(z_1,\ldots,z_k)=G(G_{11}(z_1,\ldots,z_k),\ldots,G_{r1}(z_1,\ldots,z_k))\,,\\&G_{tj}(z_1,\ldots,z_{i_{tj}})=s_{tj},\quad 1\leqslant t\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant n_r\,.\end{aligned}$$

Согласно правилу Бекича — де Беккера — Скотта, H-компонента ее наименьшего решения определяется тогда как $\bar{G}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$. □

Дистрибутивная $\Sigma\cup\Phi_\infty$-алгебра $\langle V,+,0,\bar{\Sigma}\cup\bar{\Phi}_\infty\rangle$, где $V\subseteq A\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$, называется *эквационально замкнутой*, если V замкнуто относительно скалярного умножения и для всех $s\in V$ и $G\in\Phi_\infty$ формальный ряд деревьев $\mu G.s$ снова принадлежит V. Здесь $\mu G.s$ обозначает наименьшее решение системы $G(z_1,\ldots,z_r)=s$, где r — ранг G. По определению, $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$ — наименьшая эквационально замкнутая дистрибутивная $\Sigma\cup\Phi_\infty$-алгебра, содержащая $A\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle$. Заметим, что каждый степенной ряд в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$ является фактически степенным рядом в $A\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi}(X\cup Z_r)\rangle\rangle$ для некоторого конечного $\Phi\subset\Phi_\infty$ и $r\geqslant 0$.

Докажем, что $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle=A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$. Покажем сначала, что $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$ замкнута относительно подстановки функциональных переменных.

Теорема 5.14. *Рассмотрим ряд деревьев* s *и* σ_j, $1\leqslant j\leqslant n$, *в* $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$ *и предположим, что* $s(z_1,\ldots,z_r,G_{i_1},\ldots,G_{i_n})\in A\langle\langle T_{\hat{\Sigma}\cup\{G_{i_1},\ldots,G_{i_n}\}}(X\cup Z_r)\rangle\rangle$ *и* $\sigma_j\in A\langle\langle T_{\hat{\Sigma}}(X\cup Z_{r_{i_j}})\rangle\rangle$, *где* $\hat{\Sigma}=\Sigma\cup\{G_{k_1},\ldots,G_{k_m}\}$ *и* $i_1,\ldots,i_n,k_1,\ldots,k_m\geqslant 0$ *попарно дизъюнктны. Тогда* $\bar{s}(z_1,\ldots,z_r,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ *принадлежит* $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$.

Доказательство. Применим индукцию по числу применений операций $\bar{\omega}\in\bar{\Sigma}$, $\bar{G}\in\bar{\Phi}_\infty$, сложения, скалярного умножения и μ для порождения $s(z_1,\ldots,z_r,G_{i_1},\ldots,G_{i_n})$ из многочленов.

(i) Пусть $s(z_1,\ldots,z_r,G_{i_1},\ldots,G_{i_n})\in A\langle T_{\hat{\Sigma}\cup\{G_{i_1},\ldots,G_{i_n}\}}(X\cup Z_r)\rangle$. Поскольку $\bar{s}(z_1,\ldots,z_r,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ порождается из $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ и $z_1,\ldots,z_r$ применением операций сложения, $\bar{\omega}\in\bar{\Sigma}$, $\bar{G}_{k_1},\ldots,\bar{G}_{k_m}$, подстановки в $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ (которая описывается теоремой, подобной теореме 4.2) и скалярного умножения, то мы заключаем, что $\bar{s}(z_1,\ldots,z_r,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$.

(ii) Докажем лишь случай оператора μ. Выберем $G \in \Phi_\infty$ ранга r, отличное от $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}, G_{k_1}, \ldots, G_{k_m}$. Без уменьшения общности предположим, что $s(z_1, \ldots, z_r, G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}) = \mu G.s'(z_1, \ldots, z_r, G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}, G)$. По предположению индукции имеем: $s'(z_1, \ldots, z_r, G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}, G)$ содержится в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$. Следовательно, $\bar{s}(z_1, \ldots, z_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mu G.\bar{s}'(z_1, \ldots, z_r, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, G)$ содержится в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$ по параметрическому тождеству. $\square$

Теорема 5.15 ([17], раздел 6.). $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle = A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$.

Доказательство. (i) Покажем, что $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle \subseteq A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$. Доказательство проведем индукцией по числу переменных в алгебраических системах. Используем следующее предположение индукции:

Если $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_j \in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$, $1 \leqslant j \leqslant n$, является наименьшим решением алгебраической системы $G_j(z_1, \ldots, z_{r_j}) = s_j(z_1, \ldots, z_{r_j}, G_1, \ldots, G_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, с n функциональными переменными $G_1, \ldots, G_n$, где $s_j(z_1, \ldots, z_{r_j}, G_1, \ldots, G_n) \in A\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle$, то $\tau_j \in A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$.

(1) Пусть $n = 1$ и предположим, что $s \in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$ есть наименьшее решение алгебраической системы $G_1(z_1, \ldots, z_{r_1}) = p(z_1, \ldots, z_{r_1}, G_1)$. Поскольку $p(z_1, \ldots, z_{r_1}, G_1)$ — многочлен, то $s = \mu G_1.p(z_1, \ldots, z_{r_1}, G_1) \in A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$.

(2) Изучим алгебраическую систему $G_j(z_1, \ldots, z_{r_j}) = s_j(z_1, \ldots, z_{r_j}, G_1, \ldots, G_{n+1})$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, $n \geqslant 1$. Пусть $(\tau_2(G_1), \ldots, \tau_{n+1}(G_1))$, $\tau_j(G_1) \in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$, $2 \leqslant j \leqslant n+1$, — наименьшее решение алгебраической системы $G_j(z_1, \ldots, z_{r_j}) = s_j(z_1, \ldots, z_{r_j}, G_1, \ldots, G_{n+1})$, $2 \leqslant j \leqslant n+1$. По нашему предположению индукции мы заключаем, что $\tau_j(G_1) \in A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$. Следовательно, по теореме 5.14, $p(G_1) = \bar{s}_1(z_1, \ldots, z_{r_1}, G_1, \tau_2(G_1), \ldots, \tau_{n+1}(G_1))$ содержится в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$. Это влечет, что $\mu G_1.p(G_1)$ содержится в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$. Снова по теореме 5.14 $\bar{\tau}_j(\mu G_1.p(G_1)) \in A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$, $2 \leqslant j \leqslant n+1$. Согласно правилу Бекича — де Беккера — Скотта, $(\mu G_1.p(G_1), \bar{\tau}_2(\mu G_1.p(G_1)), \ldots, \bar{\tau}_{n+1}(\mu G_1.p(G_1)))$ является наименьшим решением алгебраической системы $G_j(z_1, \ldots, z_{r_j}) = s_j(z_1, \ldots, z_{r_j}, G_1, \ldots, G_{n+1})$, $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Следовательно, компоненты наименьшего решения алгебраической системы содержатся в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$.

(ii) Покажем, что $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$ — эквационально замкнутая дистрибутивная $\Sigma \cup \Phi_\infty$-алгебра, содержащая $A\langle T_\Sigma(X \cup Z\rangle$. Это влечет $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle \subseteq A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$. По теореме 5.13, нам нужно только показать, что $\mu G.s$, $s \in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X\cup Z)\rangle\rangle$ содержится в $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$. Пусть $(\tau_2(G_1), \ldots, \tau_{n+1}(G_1))$ является наименьшим решением алгебраической системы $G_j(z_1, \ldots, z_{r_j}) = s_j(z_1, \ldots, z_{r_j}, G_1, \ldots, G_{n+1})$, $2 \leqslant j \leqslant n+1$, пусть G_1 имеет ранг r_2 и возьмем $s = \tau_2$. Рассмотрим теперь алгебраическую систему $G_1(z_1, \ldots, z_{r_2}) = s_2(z_1, \ldots, z_{r_2}, G_1, \ldots, G_{n+1})$, $G_j(z_1, \ldots, z_{r_j}) =$

$= s_j(z_1, \ldots, z_{r_j}, G_1, \ldots, G_{n+1})$, $2 \leqslant j \leqslant n+1$. Тогда по правилу Бекича — де Беккера — Скотта $\mu G_1.\bar{s}_2(z_1, \ldots, z_{r_2}, G_1, \tau_2(G_1), \ldots, \tau_{n+1}(G_1)) = \mu G_1.\tau_2(G_1)$ — первая компонента ее наименьшего решения. □

Введем теперь алгебраические выражения над рядами деревьев. Предположим, что $A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty$ и $U = \{+, \cdot, \mu, [,]\}$ попарно дизъюнктны. Слово E над $A \cup \Sigma \cup X \cup Z \cup \Phi_\infty \cup U$ называется *алгебраическим выражением с рядами деревьев над* $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, если:

(i) E содержится в $X \cup Z$, или

(ii) E имеет одну из форм $[E_1 + E_2]$, $\omega(E_1, \ldots, E_k)$, $G(E_1, \ldots, E_k)$, aE_1, или $\mu G.E_1$, где $E_1, \ldots, E_k$ — алгебраические выражения с рядами деревьев над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, для $\omega \in \Sigma$ ранга k, $G \in \Phi_\infty$ ранга k, $k \geqslant 0$, и $a \in A$.

Каждое алгебраическое выражение с рядами деревьев E над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$ обозначает формальный ряд деревьев $|E|$ в $A\langle\langle T_{\Sigma\cup\Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$ в соответствии со следующими соглашениями.

(i) Если E содержится в $X \cup Z$, то E обозначает ряд деревьев E, то есть $|E| = E$.

(ii) Для алгебраических выражений с рядами деревьев $E_1, \ldots, E_k$ над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, $\omega \in \Sigma$ ранга k, $G \in \Phi_\infty$ ранга k, $k \geqslant 0$, $a \in A$, определим

$$\begin{aligned}
&|[E_1 + E_2]| = |E_1| + |E_2|\,,\\
&|\omega(E_1, \ldots, E_k)| = \bar{\omega}(|E_1|, \ldots, |E_k|)\,,\\
&|G(E_1, \ldots, E_k)| = \bar{G}(|E_1|, \ldots, |E_k|)\,,\\
&|aE_1| = a|E_1|\,,\\
&|\mu G.E_1| = \mu G.|E_1|\,.
\end{aligned}$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — отображения из множества алгебраических выражений с рядами деревьев над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$ во множество конечных подмножеств из $X \cup Z \cup \Phi_\infty$, определяемые как

(i) $\varphi_1(x) = \emptyset$, $\varphi_2(x) = \{x\}$, $\varphi_3(x) = \emptyset$, $x \in X$,
$\varphi_1(z) = \{z\}$, $\varphi_2(z) = \emptyset$, $\varphi_3(z) = \emptyset$, $z \in Z$,

(ii) $\varphi_j([E_1 + E_2]) = \varphi_j(E_1) + \varphi_j(E_2)$, $j = 1, 2, 3$,
$\varphi_j(\omega(E_1, \ldots, E_k)) = \varphi_j(E_1) \cup \ldots \cup \varphi_j(E_k)$, $j = 1, 2, 3$,
$\varphi_j(G(E_1, \ldots, E_k)) = \varphi_j(E_1) \cup \ldots \cup \varphi_j(E_k)$, $j = 1, 2$,
$\varphi_3(G(E_1, \ldots, E_k)) = \varphi_3(E_1) \cup \ldots \cup \varphi_3(E_k) \cup \{G\}$,
$\varphi_j(aE_1) = \varphi_j(E_1)$, $a \neq 0$, $\varphi_j(0E_1) = \emptyset$, $a = 0$, $j = 1, 2, 3$,
$\varphi_j(\mu G.E_1) = \varphi_j(E_1) - \{G\}$ $j = 1, 2, 3$,
для алгебраических выражений с рядами деревьев $E_1, \ldots, E_k$ над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, $\omega \in \Sigma$ ранга k, $G \in \Phi_\infty$ ранга k, $k \geqslant 0$, $a \in A$.

Для данного алгебраического выражения с рядами деревьев E над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$ имеем: $\varphi_1(E) \subseteq Z$ содержит переменные в E, $\varphi_2(E) \subseteq X$ содержит используемые символы алфавита листьев X и $\varphi_3(E) \subseteq G$ содержит свободные функциональные переменные в E. Это означает, что $|E|$ — формальный ряд деревьев в $A\langle\langle T_{\Sigma \cup \varphi_3(E)}(\varphi_2(E) \cup \varphi_1(E))\rangle\rangle$.

Теорема 5.15 и приведенные выше определения дают следствия.

Следствие 5.16. *Ряд деревьев s содержится в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi_\infty}(X \cup \cup Z)\rangle\rangle \cap A\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi'}(X' \cup Z')\rangle\rangle$, где $X' \subseteq X$, $Z' \subseteq Z$ и $\Phi' \subseteq \Phi_\infty$, тогда и только тогда, когда существует такое алгебраическое выражение с рядами деревьев E над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, что $s = |E|$, где $\varphi_2(E) = X'$, $\varphi_1(E) = Z'$ и $\varphi_3(E) = \Phi'$.*

Следствие 5.17. *Ряд деревьев s содержится в $A^{\mathrm{equ}}\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi_\infty}(X \cup \cup Z)\rangle\rangle \cap A\langle\langle T_{\Sigma}(X')\rangle\rangle$, где $X' \subseteq X$, тогда и только тогда, когда существует такое алгебраическое выражение с рядами деревьев E над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, что $s = |E|$, где $\varphi_1(E) = \varphi_3(E) = \emptyset$ и $\varphi_2(E) = X'$.*

Следствие 5.18. *Ряд деревьев s содержится в $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma}(X')\rangle\rangle$, где $X' \subseteq X$, тогда и только тогда, когда существует такое алгебраическое выражение с рядами деревьев E над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, что $s = |E|$, где $\varphi_1(E) = \varphi_3(E) = \emptyset$ и $\varphi_2(E) = X'$.*

Суммируем наши результаты в теореме, подобной теореме Клини.

Теорема 5.19. *Следующие утверждения о степенном ряде $r \in A\langle\langle T_{\Sigma}(X)\rangle\rangle$ эквивалентны.*

(i) r — алгебраический ряд деревьев.

(ii) r — поведение простого магазинного автомата над деревьями.

(iii) r — поведение простого ограниченного магазинного автомата над деревьями.

(iv) существует алгебраическое выражение с рядами деревьев E над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, $\varphi_1(E) = \varphi_3(E) = \emptyset$, такое, что $r = |E|$.

Если интерпретировать алгебраические выражения с рядами деревьев в $\mathbb{B}\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi_\infty}(X \cup Z)\rangle\rangle$, то получим аналогичные результаты о формальных языках над деревьями.

Пример 5.2. Рассмотрим алгебраическую систему над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, E, G_0)$ с начальной функциональной переменной G_0, заданную посредством $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_2$, $\Phi_0 = \{G_0\}$, $\Phi_2 = \{G\}$, $\Sigma = \Sigma_2 = \{b\}$, $X = \{c_1, c_2\}$ и $E = \{G_0 = G(c_1, c_2), G(z_1, z_2) = = G(b(z_1, z_1), b(z_2, z_2)) + b(z_1, z_2)\}$ (эта алгебраическая система является упрощенной версией системы из примера 5.1). Начальная компонента ее наименьшего решения определяется как

$$|\mu G.[G(b(c_1, c_1), b(c_2, c_2)) + b(c_1, c_2)]| = \sum_{j \geqslant 0} b(t_1^j, t_2^j)\,,$$

где $t_i^0 = c_i$, $t_i^{j+1} = b(t_i^j, t_i^j)$, $i = 1, 2$, $j \geqslant 0$. $\square$

6. Трансдукторы над рядами деревьев

Трансдукторы над деревьями были введены в работах [48; 50] и [53; 54] (см. также [28]). В [40] обобщена ограниченная форма трансдукторов над деревьями нисходящего типа на трансдукторы над рядами деревьев, которые отображают формальные ряды деревьев в формальные ряды деревьев. В [23] и [29] обобщен этот подход и определены трансдукторы над рядами деревьев восходящего и нисходящего типов как обобщение трансдукторов над деревьями типа «от границы к корню» («frontier-to-root-трансдуктор») и «от корня к границе» («root-to-frontier-трансдуктор») в смысле [30; 31].

В этой главе мы рассмотрим только случай трансдукторов над рядами деревьев нисходящего типа (трансдукторы над рядами деревьев восходящего типа используют обобщение IO-подстановок и трудны в обращении). Наше определение трансдукторов над рядами деревьев нисходящего типа отличается от определения в [23], но эквивалентно ему.

Затем мы определим недетерминированные простые распознаваемые трансдукторы над рядами деревьев и покажем, что они сохраняют распознаваемость рядов деревьев.

Дерево $t \in T_\Sigma(X \cup Y_m)$, $m \geqslant 1$, называется *линейным*, если переменная y_j не более одного раза встречается в t, $1 \leqslant j \leqslant m$. Дерево $t \in T_\Sigma(X \cup Y_m)$, $m \geqslant 1$, называется *неисключающим*, если переменная y_j не менее одного раза встречается в t, $1 \leqslant j \leqslant m$. Ряд деревьев $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_m)\rangle\rangle$, $m \geqslant 1$, называется *линейным*, или *неисключающим*, если все $t \in \operatorname{supp}(s)$ являются линейными, или неисключающими, соответственно.

Определим

$$(A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I_1 \times I_2^*} = \bigcup_{m \geqslant 0} (A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{I_1 \times I_2^m}.$$

Древовидное представление μ (с *множеством состояний* Q, *упорядоченным входным алфавитом* Σ, *входным алфавитом листьев* X, *упорядоченным выходным алфавитом* Σ', *выходным алфавитом листьев* X', *над полукольцом* A) есть семейство $\mu = (\mu_k \mid k \geqslant 0)$ отображений

$$\begin{aligned} &\mu_k : \Sigma_k \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Y)\rangle\rangle)^{Q \times (Q \times Z_k)^*}, \ k \geqslant 1, \\ &\mu_0 : \Sigma_0 \cup X \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1}, \end{aligned}$$

такое, что если $\mu_k(\omega) \in (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Y)\rangle\rangle)^{Q \times (Q \times Z_k)^m}$ для некоторого $m \geqslant 0$ и $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, то $\mu_k(\omega) \in (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Y_m)\rangle\rangle)^{Q \times (Q \times Z_k)^m}$ и любой элемент в $\mu_k(\omega)$ является линейным и неисключающим. Заметим, что $\mu_k(\omega)$, где $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, индуцирует отображение

$$\mu_k(\omega) : (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1} \times \cdots \times (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1} \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1}$$

(имеется k аргументов-векторов; см. определение перед теоремой 2.8).

Поскольку $\langle (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q\times 1}, (\mu_k(\omega) \mid \omega \in \Sigma_k,\ k \geqslant 0)\rangle$ является Σ-алгеброй, отображение

$$\mu_0 : X \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q\times 1}$$

может быть единственным образом продолжено до морфизма

$$\mu : T_\Sigma(X) \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q\times 1}$$

посредством

$$\mu(\omega(t_1, \ldots, t_k)) = \mu_k(\omega)[\mu(t_1), \ldots, \mu(t_k)]$$

для $\omega \in \Sigma_k$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)$, $k \geqslant 0$.

Еще одно продолжение дает

$$\mu : A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q\times 1}$$

посредством

$$\mu(s) = \sum_{t\in T_\Sigma(X)} (s,t) \otimes \mu(t), \quad s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle\,,$$

где $\otimes$ обозначает произведение Кронекера (см. [46], глава 4). В нашем случае это означает, что каждый элемент в $\mu(t)$ умножается на (s,t). Следовательно, для $q \in Q$

$$\mu(s)_q = \sum_{t\in T_\Sigma(X)} (s,t)\mu(t)_q, \quad s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle\,.$$

Мы обозначили древовидное представление μ и отображение $\mu : A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q\times 1}$, индуцируемое им, одной и той же буквой μ. Это не должно приводить к путанице.

(*Нисходящий*) *трансдуктор над рядами деревьев* (с *множеством состояний* Q, *упорядоченным входным алфавитом* Σ, *входным алфавитом листьев* X, *упорядоченным выходным алфавитом* Σ', *выходным алфавитом листьев* X', *над полукольцом* A)

$$\mathfrak{T} = (Q, \mu, S)$$

определяется посредством

(i) непустого конечного множества Q *состояний*,

(ii) *древовидного представления* μ с $Q, \Sigma, X, \Sigma', X'$ над A,

(iii) *вектора начальных состояний* $S \in (A\langle T_{\Sigma'}(Y_1)\rangle)^{1\times Q}$, где $S_q = a_q y_1$, $a_q \in A$, $q \in Q$.

Отображение

$$||\mathfrak{T}|| : A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle \to A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle,$$

реализуемое трансдуктором над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (Q, \mu, S)$, определяется посредством

$$\begin{aligned}&||\mathfrak{T}||(s) = S(\mu(s)) = \textstyle\sum_{q\in Q}(S_q, y_1)\mu(s)_q = \\ &= \textstyle\sum_{q\in Q}\sum_{t\in T_\Sigma(X)} a_q(s,t)\mu(t)_q, \quad s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle\,.\end{aligned}$$

Древовидное представление μ называется *полиномиальным*, если элементы образов отображений μ_k, $k \geqslant 0$, являются полиномами. Трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (Q, \mu, S)$ называется *полиномиальным*, если μ — полиномиальное древовидное представление.

Пример 6.1 (см. пример IV.1.6 в [30]). Пусть $Q = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\Sigma = \Sigma_1 = \{\sigma\}$, $X = \{x\}$, $\Sigma' = \Sigma'_1 \cup \Sigma'_2$, $\Sigma'_1 = \{\omega_1\}$, $\Sigma'_2 = \{\omega_2\}$, $X' = \{x'_1, x'_2\}$.

Ненулевые элементы отображений μ_0 и μ_1 заданы как

$$\begin{aligned}&\mu_0(x)_{a_1} = x'_1, \quad \mu_0(x)_{a_2} = x'_2\,, \\ &\mu_1(\sigma)_{a_0,((a_1,z_1),(a_2,z_1))} = \omega_2(y_1, y_2)\,, \\ &\mu_1(\sigma)_{a_1,(a_1,z_1)} = \omega_1(y_1), \quad \mu_1(\sigma)_{a_2,(a_2,z_1)} = \omega_1(y_1)\,.\end{aligned}$$

Пусть $S = (y_1, 0, 0)$ и рассмотрим полиномиальный трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (Q, (\mu_0, \mu_1), S)$. Мы утверждаем, что для $n \geqslant 0$

$$\mu(\sigma^n(x))_{a_i} = \omega_1^n(x'_i), \quad i = 1, 2\,,$$

и докажем это индукцией по n.

Имеем $\mu(x)_{a_i} = \mu_0(x)_{a_i} = x'_i$ и, для $n > 0$,

$$\begin{aligned}&\mu(\sigma^n(x))_{a_i} = \mu_1(\sigma)[\mu(\sigma^{n-1}(x))]_{a_i} = \\ &= \mu_1(\sigma)_{a_i,(a_i,z_1)}[\omega_1^{n-1}(x'_i)] = \\ &= \omega_1(y_1)(\omega_1^{n-1}(x'_i)) = \omega_1^n(x'_i), \quad i = 1, 2\,.\end{aligned}$$

Следовательно, получим для $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}&||\mathfrak{T}||(\sigma^n(x)) = \mu(\sigma^n(x))_{a_0} = \\ &= \mu_1(\sigma)[\mu(\sigma^{n-1}(x))]_{a_0} = \\ &= \mu_1(\sigma)_{a_0,((a_1,z_1),(a_2,z_1))}(\mu(\sigma^{n-1}(x))_{a_1}, \mu(\sigma^{n-1}(x))_{a_2}) = \\ &= \omega_2(\omega_1^{n-1}(x'_1), \omega_1^{n-1}(x'_2))\,.\end{aligned}$$

Для данного формального ряда деревьев

$$s = (s, x)x + \sum_{n\geqslant 1}(s, \sigma^n(x))\sigma^n(x)$$

получим

$$||\mathfrak{T}||(s) = \sum_{n\geqslant 1}(s, \sigma^n(x))\omega_2(\omega_1^{n-1}(x'_1), \omega_1^{n-1}(x'_2))\,.$$

□

В связи с примером IV.1.6 в [30] пример 6.1 дает интуитивное ощущение того, как «root-to-frontier-трансдуктор» над деревьями в смысле [30] моделируется трансдуктором над рядами деревьев нисходящего типа над полукольцом $\mathbb{B}$.

Рассмотрим деревья в носителях элементов из $\mu_k(\omega)$, где $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, заданы как в определении древовидного представления. Заметим, что ограничение в [23, с. 27], состоящее в том, что в древовидном представлении нисходящего типа переменные в этих деревьях встречаются в порядке $y_1, \ldots, y_m$ слева направо, является несущественным для вычислительных возможностей. Следовательно, имеем следующую теорему.

Теорема 6.1 ([23], леммы 4.10 и 4.12). *Отображение реализуется «root-to-frontier-трансдуктором» над деревьями тогда и только тогда, когда оно реализуется нисходящим полиномиальным трансдуктором над рядами деревьев над полукольцом* $\mathbb{B}$.

Пусть $Q'_i = \{(q, z_i) \mid q \in Q\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между $Q'_1 \times \cdots \times Q'_k$ и Q^k, заданное посредством

$$((q_1, z_1), \ldots, (q_k, z_k)) \Leftrightarrow (q_1, \ldots, q_k)\,,$$

$q_1, \ldots, q_k \in Q$. Древовидное представление $(\mu_k \mid k \geqslant 0)$ называется *недетерминированным простым*, если

$$\mu_k : \Sigma_k \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Y_k)\rangle\rangle)^{Q \times (Q'_1 \times \cdots \times Q'_k)}, \quad k \geqslant 1\,.$$

Если $(\mu_k \mid k \geqslant 0)$ — недетерминированное простое древовидное представление, то мы работаем с изоморфными копиями $\mu_k(\omega)'$ отображений $\mu_k(\omega)$ в $(A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Y_k)\rangle\rangle)^{Q \times Q^k}$, $k \geqslant 0$. По теореме 2.8

$$\mu_k(\omega)'(P_1, \ldots, P_k) = \mu_k(\omega)[P_1, \ldots, P_k]$$

для $P_j \in (A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y')\rangle\rangle)^{Q \times 1}$, $1 \leqslant j \leqslant k$, и $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 0$. Следовательно, можно определить недетерминированное простое древовидное представление как семейство отображений $(\mu_k \mid k \geqslant 0)$, где

$$\mu_k : \Sigma_k \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Y_k)\rangle\rangle)^{Q \times Q^k}, \quad k \geqslant 1\,,$$
$$\mu_0 : \Sigma_0 \cup X \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1}\,.$$

Морфическое расширение μ_0 снова определяется посредством $\mu(\omega(t_1, \ldots, t_k)) = \mu_k(\omega)(\mu(t_1), \ldots, \mu(t_k))$, $\omega \in \Sigma_k$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)$, $k \geqslant 1$, и для $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ определим $\mu(s) = \sum_{t \in T_\Sigma(X)} (s, t) \otimes \mu(t)$.

Недетерминированный простой трансдуктор над рядами деревьев — теперь трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (Q, \mu, S)$, где μ — недетерминированное простое древовидное представление и $||\mathfrak{T}||(s) = S(\mu(s)) = \sum_{q \in Q} (S_q, y_1)\mu(s)_q$ для $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.

В работе [40, с. 139] разъясняется, как недетерминированный простой трансдуктор над рядами деревьев над полукольцом $\mathbb{B}$ связан с недетерминированным простым root-to-frontier-трансдуктором над деревьями в смысле [30], упражнение IV.4.

Теорема 6.2 ([40], теорема 6). *Пусть для некоторого* $k \geqslant 1$ $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_k)\rangle\rangle$ — *линейный и неисключающий ряд и* $s_{i_j} \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, $a_{i_j} \in A$ *для* $i_j \in I_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$. *Тогда*

$$s(\sum_{i_1 \in I_1} a_{i_1} s_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k \in I_k} a_{i_k} s_{i_k}) = \sum_{i_1 \in I_1} \ldots \sum_{i_k \in I_k} a_{i_1} \ldots a_{i_k} s(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}) .$$

Теорема 6.3. *Пусть* $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, $s_1, \ldots, s_k \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, *и* μ — *недетерминированное простое древовидное представление с множеством состояний* Q. *Тогда*

$$\mu_k(\omega)(\mu(s_1), \ldots, \mu(s_k)) = \mu(\bar{\omega}(s_1, \ldots, s_k)) .$$

Доказательство. Вычислим сначала левую часть равенства для индекса $q \in Q$:

$$\begin{aligned}
&\mu_k(\omega)(\mu(s_1), \ldots, \mu(s_k))_q = \\
&= \sum_{q_1, \ldots, q_k \in Q} \mu_k(\omega)_{q,(q_1,\ldots,q_k)}(\mu(s_1)_{q_1}, \ldots, \mu(s_k)_{q_k}) = \\
&= \sum_{q_1, \ldots, q_k \in Q} \mu_k(\omega)_{q,(q_1,\ldots,q_k)}(\sum_{t_1 \in T_\Sigma(X)} (s_1, t_1)\mu(t_1)_{q_1}, \ldots, \\
&\qquad\qquad \sum_{t_k \in T_\Sigma(X)} (s_k, t_k)\mu(t_k)_{q_k}) = \\
&= \sum_{q_1, \ldots, q_k \in Q} \sum_{t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)} (s_1, t_1) \cdots (s_k, t_k)\mu_k(\omega)_{q,(q_1,\ldots,q_k)}(\mu(t_1)_{q_1}, \ldots, \\
&\qquad\qquad \mu(t_k)_{q_k}) = \\
&= \sum_{t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)} (s_1, t_1) \cdots (s_k, t_k)\mu(\omega(t_1, \ldots, t_k))_q .
\end{aligned}$$

Здесь третье равенство следует из предположения, что μ — недетерминированное простое древовидное представление, и из теоремы 6.2. Вычислим теперь правую часть равенства для индекса $q \in Q$:

$$\begin{aligned}
&\mu(\bar{\omega}(s_1, \ldots, s_k))_q = \\
&= \mu(\sum_{t \in T_\Sigma(X)} (\sum_{\omega(t_1,\ldots,t_k)=t} (s_1, t_1) \cdots (s_k, t_k))t)_q = \\
&= \sum_{t \in T_\Sigma(X)} (\sum_{\omega(t_1,\ldots,t_k)=t} (s_1, t_1) \cdots (s_k, t_k))\mu(t)_q \times \\
&\quad \times \sum_{t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)} (s_1, t_1) \cdots (s_k, t_k)\mu(\omega(t_1, \ldots, t_k))_q .
\end{aligned}$$

Поскольку обе части равенства совпадают, то теорема доказана. □

Если базовым полукольцом является булево полукольцо $\mathbb{B}$, то из примера 6.1 легко видеть, что наши полиномиальные трансдукторы над рядами деревьев не сохраняют распознаваемость рядов деревьев (см. также пример в последнем параграфе [31, с. 18]).

С другой стороны, линейные root-to-frontier-трансдукторы над деревьями сохраняют распознаваемость языков над деревьями (см. [53] и [30], теорема IV.2.7, лемма IV.6.5 и следствие IV.6.6). В оставшейся части этой главы покажем, что недетерминированные простые распознаваемые трансдукторы над рядами деревьев сохраняют распознаваемость рядов деревьев. Сделаем это построением, основывающимся на конечных распознаваемых системах.

Система $z_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называется *распознаваемой*, если каждое p_i содержится в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_n)\rangle\rangle$.

Мы покажем, что наименьшее решение конечной распознаваемой системы имеет распознаваемые компоненты.

Теорема 6.4. *Пусть $z_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — конечная распознаваемая система с наименьшим решением σ. Тогда $\sigma_i \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Без уменьшения общности пусть $z_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — собственная конечная распознаваемая система. Так как $p_i \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_n)\rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то существуют конечные полиномиальные системы $y_{ij} = q_{ij}$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, $m_i \geqslant 1$, где y_{ij} — новые переменные и $q_{ij} \in A\langle T_\Sigma(X \cup Z_n \cup \{y_{i1}, \ldots, y_{im_i}\})\rangle$ такие, что y_{i1}-е компоненты их наименьших решений τ_i равны p_i. Рассмотрим теперь собственную конечную полиномиальную систему $z_i = q_{i1}(z_1, \ldots, z_n, y_{i1}, \ldots, y_{im_i})$, $y_{ij} = q_{ij}(z_1, \ldots, z_n, y_{i1}, \ldots, y_{im_i})$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и заметим, что она имеет единственное решение. Мы утверждаем, что это единственное решение задается как $\sigma \cup ((\tau_i)_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mid 1 \leqslant j \leqslant m_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$. Подстановка этого вектора дает для $1 \leqslant j \leqslant m_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$
\begin{aligned}
&q_{i1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, (\tau_i)_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, (\tau_i)_{m_i}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) = \\
&\quad = (\tau_i)_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = p_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sigma_i\,, \\
&q_{ij}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, (\tau_i)_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \ldots, (\tau_i)_{m_i}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) = \\
&\quad = (\tau_i)_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\,.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\sigma \cup ((\tau_i)_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mid 1 \leqslant j \leqslant m_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$ является единственным решением собственной конечной полиномиальной системы и $\sigma \in (A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle)^{n \times 1}$. □

Рассмотрим конечную систему $y_i = p_i(y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где $p_i \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_n)\rangle\rangle$, и недетерминированное простое древовидное представление $\mu = (\mu_k \mid k \geqslant 0)$ с множеством состояний Q, где $\mu_k : \Sigma_k \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Z_k)\rangle\rangle)^{Q \times Q^k}$, $k \geqslant 1$, и $\mu_0 : \Sigma_0 \cup X \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1}$. Пусть $(y_i)_q$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $q \in Q$, — новая переменная и обозначим $Y_Q^k = \{(y_i)_q \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ q \in Q\}$. Расширим определение μ на область $\Sigma \cup X \cup Y_n$ посредством

$$\mu_0 : Y_n \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(Y_Q^n)\rangle\rangle)^{Q \times 1}\,,$$

где $\mu(y_j)_q = (y_j)_q$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $q \in Q$. При таком расширении получим отображение

$$\mu : T_\Sigma(X \cup Y_n) \to (A\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Y_Q^n)\rangle\rangle)^{Q \times 1}\,.$$

Лемма 6.5. *Рассмотрим* $s(y_1,\ldots,y_n) \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_n)\rangle\rangle$ *и недетерминированное простое древовидное представление* μ *с областью* $\Sigma \cup X \cup Y_n$. *Пусть* $s_1,\ldots,s_n \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. *Тогда*

$$\mu(s)[\mu(s_j)_q/(y_j)_q,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ q \in Q] = \mu(s(s_1,\ldots,s_n))\,.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала дерево $t \in T_\Sigma(X \cup Y_n)$ и покажем индукцией по виду t, что $\mu(t)[\mu(s_j)_q/(y_j)_q,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$ $q \in Q] = \mu(t(s_1,\ldots,s_n))$.
(i) Для $t = y_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, получим $\mu(y_i)[\mu(s_j)/\mu(y_j),\ 1 \leqslant j \leqslant n] =$ $= \mu(s_i) = \mu(y_i(s_1,\ldots,s_n))$.
(ii) Для $t = x$, $x \in \Sigma_0 \cup X$, получим $\mu(x)[\mu(s_j)/\mu(y_j),\ 1 \leqslant j \leqslant n] =$ $= \mu(x) = \mu(x(s_1,\ldots,s_n))$.
(iii) Для $t = \omega(t_1,\ldots,t_k)$, $\omega \in \Sigma_k$, $t_1,\ldots,t_k \in T_\Sigma(X \cup Y_n)$, $k \geqslant 1$, получим

$$\begin{aligned}
&\mu(\omega(t_1,\ldots,t_k))[\mu(s_j)/\mu(y_j),\ 1 \leqslant j \leqslant n] = \\
&= \mu_k(\omega)(\mu(t_1)[\mu(s_j)/\mu(y_j),\ 1 \leqslant j \leqslant n],\ldots,\mu(t_k)[\mu(s_j)/\mu(y_j), \\
&\quad 1 \leqslant j \leqslant n]) = \\
&= \mu_k(\omega)(\mu(t_1(s_1,\ldots,s_n)),\ldots,\mu(t_k(s_1,\ldots,s_n))) = \\
&= \mu(\bar\omega(t_1(s_1,\ldots,s_n),\ldots,t_k(s_1,\ldots,s_n))) = \\
&= \mu((\bar\omega(t_1,\ldots,t_k))(s_1,\ldots,s_n))\,.
\end{aligned}$$

Здесь мы применили предположение индукции во втором равенстве и теорему 6.3 в третьем равенстве.

Окончательно получим

$$\begin{aligned}
&\mu(s)[\mu(s_j)/\mu(y_j),\ 1 \leqslant j \leqslant n] = \\
&= \textstyle\sum_{t \in T_\Sigma(X \cup Y_n)}(s,t) \otimes \mu(t)[\mu(s_j)/\mu(y_j),\ 1 \leqslant j \leqslant n] = \\
&= \textstyle\sum_{t \in T_\Sigma(X \cup Y_n)}(s,t) \otimes \mu(t(s_1,\ldots,s_n)) = \\
&= \mu(\textstyle\sum_{t \in T_\Sigma(X \cup Y_n)}(s,t)t(s_1,\ldots,s_n)) = \mu(s(s_1,\ldots,s_n))\,.
\end{aligned}$$

□

Теорема 6.6. *Рассмотрим недетерминированное простое древовидное представление* μ *с областью* $\Sigma \cup X \cup Y_n$. *Пусть* $y_i =$ $= p_i(y_1,\ldots,y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *где* $p_i \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Y_n)\rangle\rangle$, *является конечной системой с наименьшим решением* σ. *Тогда* $\mu(\sigma)$ — *наименьшее решение конечной системы* $\mu(y_i) = \mu(p_i(y_1,\ldots,y_n))$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $(\sigma^j \mid j \in \mathbb{N})$ и $(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$ — аппроксимирующие последовательности для $y_i = p_i(y_1,\ldots,y_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $\mu(y_i) = \mu(p_i(y_1,\ldots,y_n))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, соответственно. Мы утверждаем, что $\tau_i^j = \mu(\sigma_i^j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $j \geqslant 0$, и покажем это индукцией по j. Случай $j = 0$ очевиден. Пусть $j \geqslant 0$. Тогда для $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\begin{aligned}
&\tau_i^{j+1} = \mu(p_i(y_1,\ldots,y_n))[\tau_k^j/\mu(y_k),\ 1 \leqslant k \leqslant n] = \\
&= \mu(p_i(y_1,\ldots,y_n))[\mu(\sigma_k^j)/\mu(y_k),\ 1 \leqslant k \leqslant n] = \\
&= \mu(p_i(\sigma_1^j,\ldots,\sigma_n^j)) = \mu(\sigma_i^{j+1})\,.
\end{aligned}$$

Испольовано предположение индукции во втором равенстве и лемму 6.5 в третьем равенстве. Из этого утверждения следует теорема.
□

Недетерминированное простое древовидное представление $\mu = (\mu_k \mid k \geqslant 0)$ называется *распознаваемым*, если $\mu_k(\omega) \in \in (A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Z_k)\rangle\rangle)^{Q \times Q^k}$ для каждого $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, и $\mu_0(\omega) \in \in (A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1}$ для каждого $\omega \in \Sigma_0 \cup X$. Недетерминированный простой трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (Q, \mu, S)$ является *распознаваемым*, если μ — недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление.

Теорема 6.7. *Рассмотрим недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление* μ. *Пусть* s *содержится в* $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$. *Тогда* $\mu(s)$ *содержится в* $(A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1}$.

Доказательство. По следствию 3.6, s — компонента конечной простой полиномиальной системы $y_i = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. По теореме 6.6, $\mu(s)$ — компонента конечной распознаваемой системы $\mu(y_i) = \mu(p_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, теорема 6.4 доказывает нашу теорему. □

Следствие 6.8 ([40], следствие 14). *Рассмотрим недетерминированный простой распознаваемый трансдуктор над рядами деревьев* $\mathfrak{T}$ *и распознаваемый ряд деревьев* s. *Тогда* $||\mathfrak{T}||(s)$ *является снова распознаваемым.*

Следствие 6.9 ([53] и [30], глава IV, следствие 6.6). *Линейные root-to-frontier-трансдукторы над деревьями сохраняют распознаваемость.*

7. Полные абстрактные семейства рядов деревьев

Полные абстрактные семейства рядов деревьев (коротко полные AFT-семейства) — это семейства рядов деревьев, замкнутые относительно недетерминированных простых распознаваемых трансдукций над рядами деревьев и некоторых других специфических операций. Покажем, что семейства распознаваемых рядов деревьев и алгебраические ряды деревьев являются полными AFT-семействами. Первое построение покажет, что отображения, реализуемые недетерминированными простыми распознаваемыми трансдукторами над рядами деревьев, замкнуты относительно композиции функций. Это построение аналогично построению в [22] в лемме 4.2 (см. также [30], теорема IV.3.15).

Напомним: $Z_Q = \{(z_i)_q \mid i \geqslant 1,\ q \in Q\}$ и $Z_Q^k = \{(z_i)_q \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ q \in Q\}$ для $k \geqslant 1$. Определим теперь для $r_1, \ldots, r_k \in Q$ оператор

$$\varphi_{r_1,\ldots,r_k} : A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q^k)\rangle\rangle \to A\langle\langle T_\Sigma(X \cup \{(z_1)_{r_1}, \ldots, (z_k)_{r_k}\})\rangle\rangle$$

следующим образом: для $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_Q^k)\rangle\rangle$ и $t \in T_\Sigma(X \cup \cup \{(z_1)_{r_1}, \ldots, (z_k)_{r_k}\})$

$$(\varphi_{r_1,\ldots,r_k}(s), t) = \begin{cases} (s,t) & \text{если каждая из переменных } (z_1)_{r_1}, \ldots, (z_k)_{r_k} \\ & \text{точно один раз встречается в } t, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть μ' — недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление с множеством состояний Q_1, отображающее $\Sigma \cup X$ во множество матриц с элементами в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Z)\rangle\rangle$. Кроме того, пусть μ'' — расширенное недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление с множеством состояний Q_2, отображающее $\Sigma' \cup X' \cup Z$ во множество матриц с элементами в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma''}(X'' \cup Z \cup Z_{Q_2})\rangle\rangle$. Определим распознаваемое древовидное представление μ с множеством состояний $Q_1 \times Q_2$, отображающее $\Sigma \cup X$ во множество матриц с элементами в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma''}(X'' \cup Z)\rangle\rangle$, как

$$\begin{aligned}
&\mu_0(x)_{(q_1,q_2)} = \mu''(\mu'_0(x)_{q_1})_{q_2} \quad \text{для } x \in \Sigma_0 \cup X,\ q_1 \in Q_1,\ q_2 \in Q_2\,,\\
&\mu_k(\omega)_{(q_1,q_2),((r_1,s_1),\ldots,(r_k,s_k))} =\\
&\qquad = \varphi_{s_1,\ldots,s_k}(\mu''(\mu'_k(\omega)_{q_1,(r_1,\ldots,r_k)})_{q_2})[z_1/(z_1)_{s_1},\ldots,z_k/(z_k)_{s_k}]\\
&\qquad \text{для } \omega \in \Sigma_k,\ k \geqslant 1,\ q_1,r_1,\ldots,r_k \in Q_1,\ q_2,s_1,\ldots,s_k \in Q_2\,.
\end{aligned}$$

Тогда, согласно [41], лемма 2.3, $(\mu_k \mid k \geqslant 0)$ — недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление и для $t \in T_\Sigma(X)$, $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$

$$\mu(t)_{(q_1,q_2)} = \mu''(\mu'(t)_{q_1})_{q_2}\,.$$

Это построение дает первую теорему этой главы.

Теорема 7.1. ([37], теорема 2.4). *Пусть μ' (соответственно μ'') — недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление с множеством состояний Q_1 (соответственно Q_2), отображающее $\Sigma \cup X$ (соответственно $\Sigma' \cup X'$) в матрицы с элементами в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Z)\rangle\rangle$ (соответственно $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma''}(X'' \cup Z)\rangle\rangle$). Пусть $\mathfrak{T}_1 = (Q_1, \mu', S_1)$ и $\mathfrak{T}_2 = (Q_2, \mu'', S_2)$ — недетерминированные простые распознаваемые трансдукторы над рядами деревьев. Тогда существует недетерминированный простой распознаваемый трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T}$ такой, что $||\mathfrak{T}||(s) = ||\mathfrak{T}_2||(||\mathfrak{T}_1||(s))$ для всех $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.*

Доказательство. Недетерминированный простой распознаваемый трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (Q_1 \times Q_2, \mu,\ S_1 \odot S_2)$ определяется недетерминированным простым распознаваемым древовидным представлением μ, построенным выше.

Пусть $(S_1)_{q_1} = a_{q_1} z_1$, $a_{q_1} \in A$, $q_1 \in Q_1$, и $(S_2)_{q_2} = b_{q_2} z_1$, $b_{q_2} \in A$, $q_2 \in Q_2$. Тогда $(S_1 \odot S_2)_{(q_1,q_2)} = a_{q_1} b_{q_2} z_1$ для $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$. Получим теперь для $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$:

$$\begin{aligned}
&||\mathfrak{T}_2||(||\mathfrak{T}_1||(s)) = \textstyle\sum_{q_2 \in Q_2} b_{q_2} \sum_{t_2 \in T_{\Sigma'}(X')} (||\mathfrak{T}_1||(s), t_2)\mu''(t_2)_{q_2} =\\
&= \textstyle\sum_{q_2 \in Q_2} b_{q_2} \sum_{t_2 \in T_{\Sigma'}(X')} (\sum_{q_1 \in Q_1} a_{q_1} \sum_{t_1 \in T_\Sigma(X)} (s, t_1)\mu'(t_1)_{q_1}, t_2) \times\\
&\quad \times \mu''(t_2)_{q_2} =\\
&= \textstyle\sum_{q_1 \in Q_1} \sum_{q_2 \in Q_2} a_{q_1} b_{q_2} \sum_{t_1 \in T_\Sigma(X)} (s, t_1) \sum_{t_2 \in T_{\Sigma'}(X')} (\mu'(t_1)_{q_1}, t_2) \times\\
&\quad \times \mu''(t_2)_{q_2} =\\
&= \textstyle\sum_{(q_1,q_2) \in Q_1 \times Q_2} a_{q_1} b_{q_2} \sum_{t_1 \in T_\Sigma(X)} (s, t_1)\mu(t_1)_{(q_1,q_2)} = ||\mathfrak{T}||(s)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

До конца главы 7 установим следующие обозначения: множество Σ_∞ (соответственно X_∞) — фиксированный *бесконечный* упорядоченный алфавит (соответственно *бесконечный* алфавит), а Σ, Σ' (соответственно X, X'), возможно снабженные индексами, есть *конечные* подалфавиты в Σ_∞ (соответственно X_∞). Нашим базовым полукольцом будет $A\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$.

Любое непустое подмножество в $\bigcup_{\Sigma\subset\Sigma_\infty}\bigcup_{X\subset X_\infty} A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ называется *семейством рядов деревьев*. Отображение

$$\tau : \bigcup_{\Sigma\subset\Sigma_\infty}\bigcup_{X\subset X_\infty} A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle \to \bigcup_{\Sigma\subset\Sigma_\infty}\bigcup_{X\subset X_\infty} A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$$

называется *недетерминированной простой распознаваемой трансдукцией над рядами деревьев*, если существуют такие Σ, X, Σ', X', что $\tau(s) \in A\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle$ для $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ и $\tau(s) = 0$ для $s \notin A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, и существует такой недетерминированный простой распознаваемый трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T}$, что $\tau(s) = ||\mathfrak{T}||(s)$ для $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.

Для семейства $\mathfrak{L}$ рядов деревьев определим

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{L}) = \{\tau(s) \mid s \in \mathfrak{L} \text{ и } \tau \text{ — недетерминированная простая распознаваемая трансдукция над рядами деревьев}\}.$$

Заметим, что по теореме 7.1 $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathfrak{L})) = \mathfrak{M}(\mathfrak{L})$. Говорят, что семейство $\mathfrak{L}$ рядов деревьев *замкнуто относительно недетерминированной простой распознаваемой трансдукции над рядами деревьев* и называют его *распознаваемым конусом рядов деревьев*, если $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}(\mathfrak{L})$.

Рассмотрим сначала распознаваемые ряды деревьев. Теорема 6.7 сразу же приводит к следующей теореме.

Теорема 7.2. $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$ *— распознаваемый конус рядов деревьев.*

Теорема 7.3. *Пусть $\mathfrak{L}$ — распознаваемый конус рядов деревьев и предположим, что $\mathfrak{L}$ содержит некоторый ряд деревьев s такой, что $(s, x) = 1$ для некоторого $x \in X_\infty$. Тогда $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle \subseteq \mathfrak{L}$.*

Доказательство. Рассмотрим распознаваемый ряд деревьев r и недетерминированный простой распознаваемый трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (\{q\}, (\mu_k \mid k \geqslant 0), z_1)$, где $\mu_0(x) = r$, $\mu_0(x') = 0$ для $x' \neq x$, $x' \in X_\infty$, и $\mu_k(\omega) = 0$, $\omega \in \Sigma_\infty$, ранга $k \geqslant 0$. Тогда $||\mathfrak{T}||(s) = r$. $\square$

Введем аналогично REC-замкнутым семействам рядов деревьев согласно [18] эквационально замкнутые семейства рядов деревьев. Семейство $\mathfrak{L}$ рядов деревьев называется *эквационально замкнутым*, если удовлетворяются следующие условия.

(i) $0 \in \mathfrak{L}$.

(ii) Если $s_1, s_2 \in \mathfrak{L}$, то $s_1 + s_2 \in \mathfrak{L}$.

(iii) Если $\omega \in \Sigma_\infty$ имеет ранг $k \geqslant 0$ и $s_1, \ldots, s_k \in \mathfrak{L}$, то $\bar{\omega}(s_1, \ldots, s_k) \in \mathfrak{L}$; если $x \in X_\infty$, то $x \in \mathfrak{L}$.

(iv) Если $s \in \mathfrak{L}$ и $x \in X_\infty$, то наименьшее решение $\mu x.s$ уравнения $x = s$ содержится в $\mathfrak{L}$.

Следовательно, семейство $\mathfrak{L}$ рядов деревьев эквационально замкнуто, если $\langle \mathfrak{L}, +, 0, (\bar{\omega} \mid \omega \in \Sigma_\infty) \cup X_\infty \rangle$ является дистрибутивной $\Sigma_\infty \cup X_\infty$-алгеброй, удовлетворяющей условию (iv), то есть нашими «рациональными» операциями являются 0, сложение, топ-сцепление и наименьшие решения уравнений (заметим, что мы не требуем замыкания относительно подстановки, что [18] делали для своих REC-замкнутых языков деревьев).

Теорема 7.4. $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$ *— эквационально замкнутое семейство рядов деревьев.*

Доказательство. По теореме 4.3. □

Теперь можно ввести полные AFT-семейства. Используем обозначение $\hat{\mathfrak{F}}(\mathfrak{L})$, где $\mathfrak{L}$ — семейство рядов деревьев, для наименьшего эквационально замкнутого семейства рядов деревьев, которое замкнуто относительно недетерминированных простых распознаваемых трансдукций над рядами деревьев и содержит $\mathfrak{L}$. Семейство $\mathfrak{L}$ рядов деревьев называется *полным AFT-семейством*, если $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{F}}(\mathfrak{L})$.

Теорема 7.5 ([41], теорема 3.5). $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$ *— полное AFT-семейство.*

Доказательство. По теоремам 7.2 и 7.4. □

Рассмотрим теперь алгебраические ряды деревьев.

Теорема 7.6. $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$ *— эквационально замкнутое семейство рядов деревьев.*

Доказательство. По теореме 5.15. □

Покажем теперь, что $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$ — полное AFT-семейство, замкнутое относительно недетерминированных простых алгебраических трансдукций над рядами деревьев. Однако перед этим нам потребуются некоторые определения и результаты.

Недетерминированное простое древовидное представление $\mu = (\mu_k \mid k \geqslant 0)$ называется *алгебраическим*, если $\mu_k(\omega) \in (A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Z_k)\rangle\rangle)^{Q \times Q^k}$ для $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, и $\mu_0(\omega) \in (A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle)^{Q \times 1}$ для $\omega \in \Sigma_0 \cup X$. Недетерминированный простой трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T} = (Q, \mu, S)$ называется *алгебраическим*, если μ — алгебраическое древовидное представление. *Недетерминированные простые алгебраические трансдукции над рядами деревьев* определяются аналогично недетерминированным простым распознаваемым трансдукциям над рядами деревьев.

Теорема 7.7 ([42], следствие 3.6). *Пусть $\mathfrak{T}$ — недетерминированный простой алгебраический трансдуктор над рядами деревьев и s — алгебраический ряд деревьев. Тогда $||\mathfrak{T}||(s)$ снова алгебраический.*

Теорема 7.8. *Пусть $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ — недетерминированные простые алгебраические трансдукторы над рядами деревьев. Тогда существует недетерминированный простой алгебраический трансдуктор над рядами деревьев $\mathfrak{T}$, такой, что $||\mathfrak{T}||(s) = ||\mathfrak{T}_2||(||\mathfrak{T}_1||(s))$ для всех $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$.*

Доказательство. Построение трансдуктора $\mathfrak{T}$ из $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ аналогично построению в доказательстве теоремы 7.1. Теорема 7.7 доказывает, что μ алгебраично. □

Для семейства $\mathfrak{L}$ рядов деревьев определим

$$\mathfrak{M}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{L}) = \{\tau(s) \mid \ s \in \mathfrak{L} \text{ и } \tau \text{ — недетерминированная простая алгебраическая трансдукция над рядами деревьев }\}.$$

Заметим, что по теореме 7.8 $\mathfrak{M}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{M}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{L})) = \mathfrak{M}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{L})$. Говорят, что семейство $\mathfrak{L}$ рядов деревьев *замкнуто относительно недетерминированных простых алгебраических трансдукций над рядами деревьев* и называют его *алгебраическим конусом рядов деревьев*, если $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}^{\mathrm{alg}}(\mathfrak{L})$.

Теорема 7.9. *Если $\mathfrak{L}$ — алгебраический конус рядов деревьев и $\mathfrak{L}$ содержит некоторый ряд деревьев s такой, что $(s, x) = 1$ для некоторого $x \in X_\infty$, то $A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle \subseteq \mathfrak{L}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 7.3. □

Теорема 7.10. *$A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$ — алгебраический конус рядов деревьев.*

Доказательство. По теоремам 7.6 и 7.7. □

Следствие 7.11 ([42], теорема 4.4). *$A^{\mathrm{alg}}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$ — полное AFT-семейство, замкнутое относительно недетерминированных простых алгебраических трансдукций над рядами деревьев.*

8. Связи с формальными степенными рядами

Применение отображения выхода к формальным рядам деревьев дает формальные степенные ряды. Сначала покажем, что макростепенные ряды в точности являются выходом алгебраических рядов деревьев. Здесь макростепенные ряды вводятся как обобщение OI-языков в [27] и индексированных языков в [8]. Далее докажем теорему Клини для макростепенных рядов и индексированных языков. Затем покажем, что алгебраические степенные ряды в точности являются выходом распознаваемых рядов деревьев. В заключение докажем, что выходом полных абстрактных семейств рядов деревьев является полное абстрактное семейство степенных рядов.

Введем теперь макростепенные ряды. Пусть $\Phi = \{G_1, \dots, G_n\}$, $\Phi \cap X = \emptyset$, где G_i имеет ранг r_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, является конечным упорядоченным алфавитом *функциональных переменных*. Определим $T(\Phi, X)$ как множество слов над $\Phi \cup X \cup \{(\} \cup \{)\} \cup \{,\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $X \cup \{\varepsilon\} \subset T(\Phi, X)$;

(ii) если $t_1, t_2 \in T(\Phi, X)$, то $t_1 t_2 \in T(\Phi, X)$;

(iii) если $G \in \Phi$, где G ранга $r \geqslant 0$, и $t_1, \ldots, t_r \in T(\Phi, X)$, то $G(t_1, \ldots, t_r) \in T(\Phi, X)$.

Слова в $T(\Phi, X)$ называются *термами над* Φ и X. Через $A\langle\langle T(\Phi, X)\rangle\rangle$ (соответственно $A\langle T(\Phi, X)\rangle$) обозначим множество степенных рядов, носители которых являются подмножествами (соответственно бесконечными подмножествами) в $T(\Phi, X)$.

Пусть $D' = A\langle\langle (X \cup Z_{r_1})^*\rangle\rangle \times \ldots \times A\langle\langle (X \cup Z_{r_n})^*\rangle\rangle$ и рассмотрим степенные ряды $s_i \in A\langle\langle T(\Phi, X \cup Z_{r_i})\rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда каждый s_i индуцирует функцию $\bar{s}_i : D' \to A\langle\langle (X \cup Z_{r_i})^*\rangle\rangle$. Для $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in D'$ определим по индукции $\bar{s}_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$:

(i) z_m, если $s_i = z_m$, $1 \leqslant m \leqslant r_i$; x, если $s_i = x$, $x \in X$;

(ii) $\bar{t}_1(\tau_1, \ldots, \tau_n)\bar{t}_2(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, если $s_i = t_1 t_2$, $t_1, t_2 \in T(\Phi, X \cup Z_{r_i})$;

(iii) $\tau_j(\bar{t}_1(\tau_1, \ldots, \tau_n), \ldots, \bar{t}_{r_j}(\tau_1, \ldots, \tau_n))$, если $s_i = G_j(t_1, \ldots, t_{r_j})$, $G_j \in \Phi$, $t_1, \ldots, t_{r_j} \in T(\Phi, X \cup Z_{r_i})$;

(iv) $a \cdot \bar{t}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, если $s_i = at$, $a \in A$, $t \in T(\Phi, X \cup Z_{r_i})$;

(v) $\sum_{j \in J} \bar{r}_j(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, если $s_i = \sum_{j \in J} r_j$, $r_j \in A\langle\langle T(\Phi, X \cup Z_{r_i})\rangle\rangle$, $j \in J$, где J — произвольное множество индексов.

Отображения $\bar{s}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, непрерывны и отображение $\bar{s} : D' \to D'$, где $\bar{s} = \langle \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\rangle$, тоже непрерывно. Это доказывается аналогично доказательству непрерывности отображений, определенных в связи с алгебраическими системами над деревьями (после теоремы 5.1).

Макросистема $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, X, E)$ (с *функциональными переменными* в Φ, *переменными* в Z и *терминальными символами* в X) имеет множество E *формальных уравнений*

$$G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = s_i(z_1, \ldots, z_{r_i}),\ 1 \leqslant i \leqslant n\,,$$

где каждое s_i содержится в $A\langle T(\Phi, X \cup Z_{r_i})\rangle$.

Решение макросистемы $\mathfrak{S}$ определяется как $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in D'$ такое, что $\tau_i = \bar{s}_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то есть посредством произвольной неподвижной точки $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ для $\bar{s} = \langle \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\rangle$. Решение $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ макросистемы $\mathfrak{S}$ называется *наименьшим решением*, если $\sigma_i \leqslant \tau_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для всех решений $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ системы $\mathfrak{S}$. Поскольку наименьшее решение макросистемы $\mathfrak{S}$ есть не что иное, как наименьшая неподвижная точка для $\bar{s} = \langle \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\rangle$, то наименьшее решение макросистемы $\mathfrak{S}$ существует в D'.

Теорема 8.1 ([44], теорема 5.1). *Пусть* $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, X, \{G_i = s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\})$ *– макросистема, где* $s_i \in A\langle T(\Phi, X \cup Z_{r_i})\rangle$. *Тогда наименьшее решение этой макросистемы* $\mathfrak{S}$ *существует в* D' *и равно*

$$\mathrm{fix}(\bar{s}) = \sup(\bar{s}^i(0) \mid i \in \mathbb{N})\,,$$

где $\bar{s}^i$ *—* i*-я итерация отображения* $\bar{s} = \langle \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\rangle : D' \to D'$.

Теорема 8.1 показывает, как вычисляется приближение к наименьшему решению макросистемы. *Аппроксимирующая последовательность* $(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$, где каждое $\tau^j \in D'$ *ассоциировано* с макросистемой $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, X, \{G_i = s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\})$, определяется так:

$$\tau^0 = 0, \quad \tau^{j+1} = \bar{s}(\tau^j),\ j \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что наименьшее решение $\mathrm{fix}(\bar{s})$ макросистемы $\mathfrak{S}$ равно $\sup(\tau^j \mid j \in \mathbb{N})$. *Макросистема с начальной функциональной переменной* $\mathfrak{S} = (\Phi \cup \{G_0\}, Z, X, \{G_i = s_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}, G_0)$ (с функциональными переменными в $\Phi \cup \{G_0\}$, переменными в Z, терминальными символами в X) есть макросистема $(\Phi \cup \{G_0\}, Z, X, \{G_i = s_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\})$ и G_0 — начальная функциональная переменная ранга 0. Пусть $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ — наименьшее решение $(\Phi \cup \{G_0\}, Z, X, \{G_i = s_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\})$. Тогда τ_0 называется *начальной компонентой* наименьшего решения. Заметим, что $\tau_0 \in A\langle\langle X^* \rangle\rangle$ не содержит переменных в Z.

Степенной ряд r в $A\langle\langle X^* \rangle\rangle$ называется *макростепенным рядом*, если r — начальная компонента наименьшего решения макросистемы с начальной функциональной переменной.

Аналогично доказательству теоремы 3.4 в [24] можно показать, что в случае булева полукольца $r \in \mathbb{B}\langle\langle X^* \rangle\rangle$ — макростепенной ряд тогда и только тогда, когда $\mathrm{supp}(r) \in X^*$ является OI-языком в смысле определения 3.10 в [27]. Более того, по теореме 5.3 из [27] $r \in \mathbb{B}\langle\langle X^* \rangle\rangle$ — макростепенной ряд тогда и только тогда, когда $\mathrm{supp}(r) \in X^*$ является индексированным языком (см. [8]).

Определим теперь отображение $\mathrm{yd} : A\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z) \rangle\rangle \to A\langle\langle T(\Phi, X \cup Z) \rangle\rangle$. Для $s \in A\langle\langle T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z) \rangle\rangle$ $\mathrm{yd}(s)$ называется *выходом* ряда s; $\mathrm{yd}(s)$ определяется индукцией следующим образом:

(i) z_m, если $s = z_m \in Z$; x, если $s = x$, $x \in X$;

(ii) $\mathrm{yd}(t_1) \ldots \mathrm{yd}(t_r)$, если $s = \omega(t_1, \ldots, t_r)$, $\omega \in \Sigma_r$, $t_1, \ldots, t_r \in T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z)$, $r \geqslant 0$ (заметим, что $\mathrm{yd}(\omega) = \varepsilon$, если $\omega \in \Sigma_0$);

(iii) $G_i(\mathrm{yd}(t_1), \ldots, \mathrm{yd}(t_{r_i}))$, если $s = G_i(t_1, \ldots, t_{r_i})$, $t_1, \ldots, t_{r_i} \in T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z)$, $1 \leqslant i \leqslant n$;

(iv) $\sum_{t \in T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z)} (s, t)\mathrm{yd}(t)$, если $s = \sum_{t \in T_{\Sigma \cup \Phi}(X \cup Z)} (s, t)t$.

Заметим, что $\mathrm{yd}(s) \in A\langle\langle (X \cup Z)^* \rangle\rangle$, если $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z) \rangle\rangle$. Следовательно, наше отображение yd является расширением обычного отображения выхода (см. [31], раздел 14).

Свяжем алгебраические ряды деревьев и макростепенные ряды с помощью отображения выхода в нашей следующей теореме.

Для заданной алгебраической системы над деревьями $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, \{G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\})$ определим макросистему $\mathrm{yd}(\mathfrak{S})$ как $\mathrm{yd}(\mathfrak{S}) = (\Phi, Z, X, \{G_i(z_1, \ldots, z_{r_i}) = \mathrm{yd}(s_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\})$.

Теорема 8.2 ([44], теорема 5.5). *Если* $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — *наименьшее решение алгебраической системы над деревьями* $\mathfrak{S}$, *то* $(\mathrm{yd}(\tau_1), \ldots, \mathrm{yd}(\tau_n))$ — *наименьшее решение макросистемы* $\mathrm{yd}(\mathfrak{S})$.

Следствие 8.3. *Если s — алгебраический ряд деревьев, то* $\mathrm{yd}(s)$ *— макростепенной ряд.*

Теорема 8.4. *Пусть $\{\bullet, e\} \subseteq \Sigma$, где $\bullet$ и e имеют ранг 2 и 0 соответственно. Тогда степенной ряд $r \in A\langle\langle X^*\rangle\rangle$ является макростепенным рядом тогда и только тогда, когда существует такой алгебраический ряд деревьев $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, что* $\mathrm{yd}(s) = r$.

Доказательство. Пусть r — начальная компонента наименьшего решения макросистемы с начальной функциональной переменной $\mathfrak{S} = (\Phi \cup \{G_0\}, Z, X, \{G_i = s_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}, G_0)$. Построим алгебраическую систему над деревьями $\mathfrak{S}' = (\Phi \cup \{G_0\}, Z, \{\bullet, e\}, \{G_i = s_i' \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}, G_0)$ такую, что $\mathrm{yd}(\mathfrak{S}') = \mathfrak{S}$, путем построения для каждого слова w из $T(\Phi \cup \{G_0\}, X \cup Z)$ дерева $t(w)$ из $T_{\{\bullet,e\}\cup\Phi\cup\{G_0\}}(X \cup Z)$:

(i) $t(\varepsilon) = e$, $t(x) = x$, $x \in X$ и $t(z) = z$, $z \in Z$;

(ii) если $w_1, w_2 \in T(\Phi \cup \{G_0\}, X \cup Z)$, то $t(w_1 w_2) = \bullet(t(w_1), t(w_2))$;

(iii) если $G \in \Phi \cup \{G_0\}$, где G имеет ранг $r \geqslant 0$ и $w_1, \ldots, w_r \in T(\Phi \cup \{G_0\}, X \cup Z)$, то $t(G(w_1, \ldots, w_n)) = G(t(w_1), \ldots, t(w_n))$.

Очевидно, получим $\mathrm{yd}(t(w)) = w$ для всех $w \in T(\Phi \cup \{G_0\}, X \cup Z)$.

Определим теперь $s_i' = \sum_{w \in A\langle\langle T(\Phi\cup\{G_0\}, X\cup Z)\rangle\rangle} (s_i, w) t(w)$. Тогда $\mathrm{yd}(\mathfrak{S}') = \mathfrak{S}$. Предположим теперь, что s — начальная компонента наименьшего решения макросистемы $\mathfrak{S}'$. Тогда $r = \mathrm{yd}(s)$. □

Пример 8.1. Пусть $\mathfrak{S} = (\Phi, Z, \Sigma, E, Z_0)$ — алгебраическая система над деревьями с начальной функциональной переменной Z_0, определенная посредством:

(i) $\Phi = \{G_0, G_1, G_2, Z_0\}$, где ранги G_0, G_1, G_2 равны 3, а ранг Z_0 равен 0;

(ii) $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$;

(iii) $\Sigma = \Sigma_2 = \{b\}$, $X = \{c_1, c_2\}$;

(iv) формальные уравнения E:

$$
\begin{aligned}
&G_0(z_0, z_1, z_2) = G_0(G_0(z_0, z_1, z_2), G_1(z_0, z_1, z_2), G_2(z_0, z_1, z_2)) + \\
&\qquad\qquad\qquad + b(z_1, z_2),\\
&G_i(z_0, z_1, z_2) = b(z_i, z_i),\ i = 1, 2,\\
&Z_0 = G_0(0, c_1, c_2).
\end{aligned}
$$

Тогда начальная компонента наименьшего решения системы $\mathfrak{S}$ есть $\sum_{j\geqslant 0} b(t_1^j, t_2^j)$, где t_1^j и t_2^j, $j \geqslant 0$, определены в примере 5.1. Макросистема $\mathrm{yd}(\mathfrak{S}) = (\Phi, Z, X, E', Z_0)$ с начальной функциональной переменной Z_0 определена формальными уравнениями из E':

$$
\begin{aligned}
&G_0(z_0, z_1, z_2) = G_0(G_0(z_0, z_1, z_2), G_1(z_0, z_1, z_2), G_2(z_0, z_1, z_2)) + z_1 z_2,\\
&G_i(z_0, z_1, z_2) = z_i z_i,\ i = 1, 2,\\
&Z_0 = G_0(0, c_1, c_2).
\end{aligned}
$$

Начальная компонента наименьшего решения системы $\mathrm{yd}(\mathfrak{S})$ есть $\sum_{j\geqslant 0} c_1^{2^j} c_2^{2^j}$. □

Введем теперь выражения над макростепенными рядами. Предположим, что A, X, Z, Φ_∞ и $U = \{+, \cdot, \mu, [,]\}$ попарно дизъюнктны. Слово E над $A \cup X \cup Z \cup \Phi_\infty \cup U$ является *выражением с макростепенными рядами над* (A, X, Z, Φ_∞), если

(i) E содержится в $X \cup Z \cup \{\varepsilon\}$, или

(ii) E имеет одну из форм $[E_1 + E_2]$, $[E_1 E_2]$, $G(E_1, \ldots, E_k)$, aE_1 или $\mu G.E_1$, где $E_1, \ldots, E_k$ — выражения с макростепенными рядами над (A, X, Z, Φ_∞), $G \in \Phi_\infty$ ранга k, $k \geqslant 0$, и $a \in A$.

Каждое выражение с макростепенными рядами E над (A, X, Z, Φ_∞) обозначает формальный степенной ряд $|E|$ в $A\langle\langle T(\Phi, X \cup Z)\rangle\rangle$, где Φ — некоторое подходящее конечное подмножество в Φ_∞, в соответствии со следующими соглашениями.

(i) Если E содержится в $X \cup Z \cup \{\varepsilon\}$, то E обозначает формальный степенной ряд E, то есть $|E| = E$.

(ii) Для выражений с макростепенными рядами $E_1, \ldots, E_k$ над (A, X, Z, Φ_∞), $G \in \Phi_\infty$ ранга k, $k \geqslant 0$, $a \in A$, определим
$|[E_1 + E_2]| = |E_1| + |E_2|$,
$|[E_1 E_2]| = |E_1||E_2|$,
$|G(E_1, \ldots, E_k)| = \sum_{t_1, \ldots, t_k \in T(\Phi, X \cup Z)} (|E_1|, t_1) \ldots (|E_k|, t_k) \times$
$\times G(t_1, \ldots, t_k)$,
$|aE_1| = a|E_1|$,
$|\mu G.E_1| = \mu G.|E_1|$.

Определим теперь «отображение выхода» Υ, которое отображает выражения с алгебраическими рядами деревьев над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$ в выражения с макростепенными рядами над (A, X, Z, Φ_∞):

(i) если E содержится в $X \cup Z$, то $\Upsilon(E) = E$;

(ii) для выражений с алгебраическими рядами деревьев $E_1, \ldots, E_k$ над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$, $\omega \in \Sigma$ ранга k, $G \in \Phi_\infty$ ранга k, $k \geqslant 0$, $a \in A$ определим:
$\Upsilon([E_1 + E_2]) = [\Upsilon(E_1) + \Upsilon(E_2)]$,
$\Upsilon(\omega(E_1, \ldots, E_k)) = [\ldots[\Upsilon(E_1)\Upsilon(\mathrm{E}_2)] \cdots \Upsilon(E_k)]$
(включая $\Upsilon(\omega) = \varepsilon$ для $k = 0$, $\Upsilon(\omega(E_1)) = \Upsilon(E_1)$ для $k = 1$),
$\Upsilon(G(E_1, \ldots, E_k)) = G(\Upsilon(E_1), \ldots, \Upsilon(E_k))$,
$\Upsilon(aE_1) = a\Upsilon(E_1)$,
$\Upsilon(\mu G.E_1) = \mu G.\Upsilon(E_1)$.

Мы утверждаем, что $\mathrm{yd}(|E|) = |\Upsilon(E)|$ для выражения с алгебраическими рядами деревьев над $(A, \Sigma, X, Z, \Phi_\infty)$. Доказательство проводится индукцией по виду E. Покажем только случай $E = \mu G.E_1$:

$$\mathrm{yd}(|E|) = \mathrm{yd}(\mu G.|E_1|) = \mu G.\mathrm{yd}(|E_1|) = \mu G.|\Upsilon(E_1)| = |\Upsilon(\mu G.E_1)| = \\ = |\Upsilon(E)|\,.$$

Здесь второе равенство следует из непрерывности отображения yd, а третье равенство верно по предположению индукции.

Определим теперь отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ аналогично подобным отображениям в главе 5.

Данные соображения вместе со следствиями 5.18 и 8.4 приводят к следующему результату. Его можно рассматривать как теорему Клини для макростепенных рядов.

Теорема 8.5. *Степенной ряд $r \in A\langle\langle X^* \rangle\rangle$ является макростепенным рядом тогда и только тогда, когда существует такое выражение с макростепенными рядами E над (A, X, Z, Φ_∞), что $r = |E|$, где $\varphi_1(E) = \varphi_3(E) = \emptyset$.*

Если базовым полукольцом является $\mathbb{B}$, то теорема 8.5 может рассматриваться как теорема Клини для индексированных языков.

Пример 8.2. Рассмотрим макросистему $\mathfrak{M} = (\Phi, Z, X, E, G_0)$ с начальной функциональной переменной G_0, определенную посредством $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_2$, $\Phi_0 = \{G_0\}$, $\Phi_2 = \{G\}$, $X = \{c_1, c_2\}$ и $E = \{G_0 = G(c_1, c_2), G(z_1, z_2) = G(z_1^2, z_2^2) + z_1 z_2\}$. Поскольку $\mathfrak{M} = \mathrm{yd}(\mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ определена в примере 5.2, то мы получим, что начальная компонента наименьшего решения системы $\mathfrak{M}$ задается как $\sum_{j \geqslant 0} c_1^{2^j} c_2^{2^j} = |\mu G.[G([c_1 c_1], [c_2 c_2]) + [c_1 c_2]]|$. Заметим, что это выражение с макростепенными рядами есть $\Upsilon(E)$, где E — выражение с алгебраическими рядами деревьев, данное в примере 5.2. □

Покажем теперь, что алгебраические степенные ряды являются выходом распознаваемых рядов деревьев.

Пусть $z_i = p_i$, $p_i \in A\langle\langle T_\Sigma(X \cup Z_n) \rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$, есть простая собственная конечная полиномиальная система с наименьшим решением $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Рассмотрим собственную алгебраическую систему $z_i = \mathrm{yd}(p_i)$, $\mathrm{yd}(p_i) \in A\langle\langle (X \cup Z_n)^* \rangle\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда легко доказать, что ее наименьшее решение есть $(\mathrm{yd}(\sigma_1), \ldots, \mathrm{yd}(\sigma_n))$. Это доказывает следующую теорему.

Теорема 8.6. *Если s — распознаваемый ряд деревьев, то $\mathrm{yd}(s)$ — алгебраический степенной ряд.*

Следстыие 8.7. *Пусть $\{\bullet, e\} \subseteq \Sigma$, где $\bullet$ и e имеют ранги 2 и 0 соответственно. Тогда степенной ряд $r \in A\langle\langle X^* \rangle\rangle$ является алгебраическим тогда и только тогда, когда существует такой ряд деревьев в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_\Sigma(X) \rangle\rangle$, что $\mathrm{yd}(s) = r$.*

Для $A = \mathbb{N}^\infty$ теорема 8.6 и теорема 3.9 из [37] влекут следующий хорошо известный результат в теории формальных языков (см. также [19], раздел 3.3, [31], раздел 14, и [52]).

Теорема 8.8. *Пусть G — контекстно-свободная грамматика. Тогда для $w \in L(G)$ существуют $d(w)$ левосторонних выводов для w в G тогда и только тогда, когда существуют $d(w)$ неизоморфных деревьев вывода в G с результатом w.*

Теоремы Клини из главы 4 влекут по следствию 8.7 теоремы Клини алгебраических степенных рядов и контекстно-свободных языков (см. [38] и [34]).

Вернемся теперь к теории полных абстрактных семейств рядов деревьев и для оставшейся части главы 8 условимся о следующем соглашении: множество Σ_∞ (соответствено X_∞) есть фиксированный *бесконечный* упорядоченный алфавит (соответствено *бесконечный* алфавит) и Σ (соответствено X), возможно, снабженный индексами, есть *конечный* подалфавит в Σ_∞ (соответствено X_∞). Кроме того, Σ_∞ содержит символ $\bullet$ ранга 2 и символ e ранга 0.

Покажем, что для полного AFT-семейства $\mathfrak{L}$ $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$ является полным абстрактным семейством рядов степенных рядов (коротко, AFP). Здесь $\mathrm{yield}(\mathfrak{L}) = \{\mathrm{yd}(s) \mid s \in \mathfrak{L}\}$.

Теорема 8.9. *Пусть $\mathfrak{L}$ — эквационально замкнутое семейство рядов деревьев. Тогда* $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$ *замкнуто относительно сложения, умножения, звезды и содержит 0 и 1.*

Доказательство. (i) Пусть $r_1, r_2 \in \mathrm{yield}(\mathfrak{L})$. Тогда существуют такие $s_1, s_2 \in \mathfrak{L}$, что $\mathrm{yd}(s_i) = r_i$, $i = 1, 2$. Поскольку $\mathfrak{L}$ замкнуто относительно сложения, $s = s_1 + s_2 \in \mathfrak{L}$ и $\mathrm{yd}(s) = r_1 + r_2 \in \mathrm{yield}(\mathfrak{L})$. Так как $\mathfrak{L}$ замкнуто относительно конкатенации, $s' = \bullet(s_1, s_2) \in \mathfrak{L}$ и $\mathrm{yd}(s') = r_1 r_2 \in \mathrm{yield}(\mathfrak{L})$.

(ii) Пусть $s \in \mathfrak{L}$ и предположим, что $x \in X_\infty$ не встречается в s. Рассмотрим уравнение $x = \bullet(s, x) + e$. Его наименьшее решение $\mu x.(\bullet(s, x) + e)$ содержится в $\mathfrak{L}$. Следовательно, наименьшее решение $\mu x.\mathrm{yd}(\bullet(s, x) + e) = \mu x.(\mathrm{yd}(s)x + \varepsilon) = \mathrm{yd}(s)^*$ для $x = \mathrm{yd}(\bullet(s, x) + e) = \mathrm{yd}(s)x + \varepsilon$ содержится в $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$. Кроме того, $\mathrm{yd}(0) = 0$ и $0^* = 1$ содержатся в $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$. $\square$

Мультипликативный морфизм

$$\nu : X^* \to (A\langle\langle X'^* \rangle\rangle)^{Q \times Q}$$

называется *представлением степенных рядов.* Представление степенных рядов ν называется *рациональным* (соответственно *алгебраическим, макропредставлением*), если элементы $\nu(x)$, $x \in X$ являются рациональными (соответственно алгебраическими, макро-) степенными рядами. Трансдуктор над степенными рядами $\mathfrak{Z} = (Q, \nu, S, P)$ называется *рациональным* (соответственно *алгебраическим, макро-*), если ν — рациональное (соответственно алгебраическое, макро-) представление степенных рядов и элементы в S и P — рациональные (соответственно алгебраические, макро-) степенные ряды. Трансдукция над степенными рядами называется *рациональной* (соответственно *алгебраической, макро-*), если она реализуется рациональным (соответственно алгебраическим, макро-) трансдуктором над степенными рядами.

Лемма 8.10. *Пусть ν — алгебраическое представление степенных рядов, определенное посредством $\nu : X \to (A^{\mathrm{alg}}\langle\langle X'^* \rangle\rangle)^{Q \times Q}$. Тогда существует недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление μ с множеством состояний $Q \times Q$, отображающее $\Sigma \cup X$ во множество матриц с элементами в $A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X' \cup Z)\rangle\rangle$, $\Sigma' = \{\bullet, e\}$ такое, что для всех $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ и $q_1, q_2 \in Q$*

$$\mathrm{yd}(\mu(s)_{(q_1, q_2)}) = \nu(\mathrm{yd}(s))_{q_1, q_2}\,.$$

Доказательство. Построим $\mu = (\mu_k \mid k \geqslant 0)$.

(i) Для $x \in X$ и $q_1, q_2 \in Q$ построим $\mu_0(x)_{(q_1,q_2)}$ в соответствии со следствием 8.7 с тем свойством, что $\mathrm{yd}(\mu_0(x)_{(q_1,q_2)}) = \nu(x)_{q_1,q_2}$.

(ii) Для $\omega \in \Sigma_0$ и $q_1, q_2 \in Q$ определим $\mu_0(\omega)_{(q_1,q_2)} = \delta_{q_1,q_2}e$, где δ — символ Кронекера; поэтому $\mathrm{yd}(\mu(\omega)_{(q_1,q_2)}) = \delta_{q_1,q_2}\varepsilon = \nu(\varepsilon)_{q_1,q_2}$.

(iii) Для $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, и $q_1, q_2, r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_k \in Q$ определим

$$\begin{aligned}\mu_k(\omega)_{(q_1,q_2),((r_1,s_1),\ldots,(r_k,s_k))} = \delta_{q_1,r_1}\delta_{s_1,r_2}\ldots\delta_{s_{k-1},r_k}\delta_{s_k,q_2}\bullet \\ \bullet\,(z_1, \bullet(z_2, \bullet(\ldots \bullet\,(z_{k-1}, z_k)\ldots))).\end{aligned}$$

Рассмотрим дерево $t \in T_\Sigma(X)$ и покажем, что $\mathrm{yd}(\mu(t)_{(q_1,q_2)}) = \nu(\mathrm{yd}(t))_{q_1,q_2}$, $q_1, q_2 \in Q$. Доказательство проведем индукцией по структуре деревьев в $T_\Sigma(X)$. Базис индукции является истинным по (i) и (ii). Пусть теперь $t = \omega(t_1, \ldots, t_k)$, $\omega \in \Sigma_k$, $k \geqslant 1$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\Sigma(X)$. Тогда получим для $q_1, q_2 \in Q$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{yd}(\mu(t)_{(q_1,q_2)}) = \mathrm{yd}(\mu(\omega(t_1, \ldots, t_k))_{(q_1,q_2)}) = \\ &= \mathrm{yd}(\textstyle\sum_{r_1,\ldots,r_k\in Q}\sum_{s_1,\ldots,s_k\in Q}\mu(\omega)_{(q_1,q_2),((r_1,s_1),\ldots,(r_k,s_k))} \\ &\qquad [\mu(t_1)_{(r_1,s_1)}/z_1, \ldots, \mu(t_k)_{(r_k,s_k)}/z_k]) = \\ &= \mathrm{yd}(\textstyle\sum_{r_1,\ldots,r_k\in Q}\sum_{s_1,\ldots,s_k\in Q}\delta_{q_1,r_1}\delta_{s_1,r_2}\ldots\delta_{s_{k-1},r_k}\delta_{s_k,q_2}\bullet(\mu(t_1)_{(r_1,s_1)}, \bullet \\ &\qquad \bullet(\mu(t_2)_{(r_2,s_2)}, \bullet(\ldots, \bullet(\mu(t_{k-1})_{(r_{k-1},s_{k-1})}, \mu(t_k)_{(r_k,s_k)})\ldots)))) = \\ &= \textstyle\sum_{s_1,\ldots,s_{k-1}\in Q}\mathrm{yd}(\mu(t_1)_{(q_1,s_1)})\mathrm{yd}(\mu(t_2)_{(s_1,s_2)})\ldots \\ &\qquad \mathrm{yd}(\mu(t_{k-1})_{(s_{k-2},s_{k-1})})\mathrm{yd}(\mu(t_k)_{(s_{k-1},q_2)}) = \\ &= \textstyle\sum_{s_1,\ldots,s_{k-1}\in Q}\nu(\mathrm{yd}(t_1))_{q_1,s_1}\nu(\mathrm{yd}(t_2))_{s_1,s_2}\ldots \\ &\qquad \nu(\mathrm{yd}(t_{k-1}))_{s_{k-2},s_{k-1}}\nu(\mathrm{yd}(t_k))_{s_{k-1},q_2} = \\ &= \nu(\mathrm{yd}(t_1)\ldots\mathrm{yd}(t_k))_{q_1,q_2} = \nu(\mathrm{yd}(t))_{q_1,q_2}.\end{aligned}$$

Следовательно, для $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$ и $q_1, q_2 \in Q$

$$\begin{aligned}&\mathrm{yd}(\mu(s)_{(q_1,q_2)}) = \textstyle\sum_{t\in T_\Sigma(X)}(s,t)\mathrm{yd}(\mu(t)_{(q_1,q_2)}) = \\ &= \textstyle\sum_{t\in T_\Sigma(X)}(s,t)\nu(\mathrm{yd}(t))_{q_1,q_2} = \nu(\mathrm{yd}(s))_{q_1,q_2}.\end{aligned}$$

□

Непустое семейство степенных рядов *алгебраический конус*, если оно замкнуто относительно алгебраических трансдукций степенных рядов. Заметим, что каждый алгебраический конус является (рациональным) конусом, то есть семейство степенных рядов замкнуто относительно рациональных трансдукций степенных рядов.

Теорема 8.11. *Пусть $\mathfrak{L}$ — полное AFT-семейство. Тогда* $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$ *— алгебраический конус.*

Доказательство. Пусть $s \in \mathfrak{L}$, $s \in A\langle\langle T_\Sigma(X)\rangle\rangle$, $r = \mathrm{yd}(s)$ и $\mathfrak{Z} = (Q, \nu, S, P)$ — алгебраический трансдуктор. Покажем, что $||\mathfrak{Z}||(r) \in A\langle\langle X'^*\rangle\rangle$ тоже содержится в $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$. Заметим, что $||\mathfrak{Z}||(r) = S\nu(r)P = \sum_{q_1,q_2\in Q}S_{q_1}\nu(r)_{q_1,q_2}P_{q_2}$, где $S_q, P_q \in A^{\mathrm{alg}}\langle\langle X'^*\rangle\rangle$, $q \in Q$.

По следствию 8.7 существуют $s_q, p_q \in A^{\mathrm{rec}}\langle\langle T_{\Sigma'}(X')\rangle\rangle$, $\bullet, e \in \Sigma'$, такие, что $\mathrm{yd}(s_q) = S_q$, $\mathrm{yd}(p_q) = P_q$, $q \in Q$. По лемме 8.10 существует недетерминированное простое распознаваемое древовидное представление μ со множеством состояний $Q \times Q$ такое, что $\mathrm{yd}(\mu(s)_{(q_1,q_2)}) = \nu(r)_{q_1,q_2}$ для всех q_1, q_2. Поскольку $\mathfrak{L}$ эквационально замкнуто, то $\sum_{q_1,q_2 \in Q} \bullet(s_{q_1}, \bullet(\mu(s)_{(q_1,q_2)}, p_{q_2}))$ содержится в $\mathfrak{L}$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{yd}(\textstyle\sum_{q_1,q_2 \in Q} \bullet(s_{q_1}, \bullet(\mu(s)_{(q_1,q_2)}, p_{q_2}))) = \\
&= \textstyle\sum_{q_1,q_2 \in Q} \mathrm{yd}(s_{q_1})\mathrm{yd}(\mu(s)_{(q_1,q_2)})\mathrm{yd}(p_{q_2}) = \\
&= \textstyle\sum_{q_1,q_2 \in Q} S_{q_1}\nu(r)_{q_1,q_2}P_{q_2} = ||\mathfrak{Z}||(r)
\end{aligned}
$$

содержится в $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$. □

Следствие 8.12. *Пусть $\mathfrak{L}$ — полное AFT-семейство. Тогда* $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$ *— полное AFP-семейство, замкнутое относительно алгебраических трансдукций.*

Следствие 8.13. *Семейство алгебраических степенных рядов является полным AFP-семейством, замкнутым относительно алгебраических трансдукций.*

Следствие 8.14. *Семейство алгебраических степенных рядов является полным AFP-семейством, замкнутым относительно подстановок.*

Теорема 8.15. *Пусть $\mathfrak{L}$ — полное AFT-семейство, замкнутое относительно алгебрачеких трансдукций рядов деревьев. Тогда* $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$ *— полное AFP-семейство, замкнутое относительно трансдукций макростепенных рядов.*

Доказательство. Подобно доказательству теоремы 8.11. □

Следствие 8.16. *Семейство макростепенных рядов является полным AFP-семейством, замкнутым относительно трансдукций макростепенных рядов.*

Следствие 8.17. *Семейство макростепенных рядов является полным AFP-семейством, замкнутым относительно подстановок.*

Вернемся теперь к случаю языков, то есть нашим базовым полукольцом будет теперь $\mathfrak{P}(T_{\Sigma_\infty}(X_\infty))$. Будем использовать без ссылок изоморфизм между $\mathfrak{P}(T_{\Sigma_\infty}(X_\infty))$ и $\mathbb{B}\langle\langle T_{\Sigma_\infty}(X_\infty)\rangle\rangle$.

Семейство $\mathfrak{L}$ языков над деревьями называется *эквационально замкнутым*, если $\langle \mathfrak{L}, \cup, \emptyset, (\bar{\omega} \mid \omega \in \Sigma_\infty) \cup X_\infty \rangle$ является дистрибутивной $\Sigma_\infty \cup X_\infty$-алгеброй, удовлетворяющей следующему условию:

> Если $L \in \mathfrak{L}$ и $x \in X_\infty$, то наименьшее решение $\mu x.L$ уравнения языка над деревьями $x = L$ содержится в $\mathfrak{L}$.

Определим $\hat{\mathfrak{F}}(\mathfrak{L})$ как наименьшее эквационально замкнутое семейство языков над деревьями, которое замкнуто относительно недетерминированных простых распознаваемых трансдукций над рядами деревьев и содержит $\mathfrak{L}$. Семейство $\mathfrak{L}$ языков над деревьями называется *полным абстрактным семейством языков над деревьями*, если $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{F}}(\mathfrak{L})$.

Свяжем теперь наши полные абстрактные семейства языков над деревьями с полными AFL-семействами (см. [51], [32] и [9]).

Теорема 8.18. *Пусть $\mathfrak{L}$ — полное абстрактное семейство языков над деревьями. Тогда* $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$ *— полное AFL-семейство, замкнутое относительно алгебраических трансдукций.*

Подстановка σ называется *контекстно-свободной*, если $\sigma(x)$ — контекстно-свободный язык для каждого $x \in X$.

Следствие 8.19. *Пусть $\mathfrak{L}$ — полное абстрактное семейство языков над деревьями. Тогда* $\mathrm{yield}(\mathfrak{L})$ *— полное AFL-семейство, замкнутое относительно контекстно-свободных подстановок.*

Следствие 8.20. *Семейство контекстно-свободных языков является AFL-семейством, замкнутым относительно подстановок.*

Следствие 8.21 ([8], теорема 3.4). *Семейство индексированных языков является AFL-семейством, замкнутым относительно подстановок.*

Исследование частично поддержано акцией Австро-Венгерского научно-педагогического сотрудничества, проект 53OeU1.

Supported by Aktion Österreich-Ungarn, Wissenschafts- und Erziehungskooperation, Projekt 53OeU1.

Список литературы

1. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы I: полукольца Конвея и конечные автоматы // Вестник Калининградского государственного университета. 2003. Вып. 3. С. 7—38.

2. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы II: непрерывные полукольца и алгебраические системы // Там же. 2005. Вып. 1—2. С. 19—45.

3. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы III: магазинные автоматы и формальные степенные ряды // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2006. Вып. 10. С. 8—27.

4. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы IV: трансдукторы и абстрактные семейства // Там же. 2008. Вып. 10. С. 6—23.

5. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы V: пары полукольцо-полумодуль Конвея и конечные автоматы // Там же. 2009. Вып. 10. С. 6—41.

6. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы VI: ω-алгебраические системы и трансдукторы // Там же. 2010. С. 8—32.

7. *Алешников С.И., Болтнев Ю.Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы VII: формальные ряды деревьев (Часть I) // Вестник Балтийского федерального университета им. И.Канта. Вып. 10. 2011. С. 5—32.

8. *Aho A. V.* Indexed grammars–an extension of context-free grammars // JACM. 1968. Vol. 15. P. 647–671.

9. *Berstel J.* Transductions and Context-Free Languages. Teubner, 1979.

10. *Berstel J., Reutenauer C.* Recognizable formal power series on trees // Theor. Comput. Sci. 1982. Vol. 18. P. 115–148.

11. *Block R. E., Griffing G.* Recognizable formal series on trees and cofree coalgebraic systems // J. of Algebra. 1999. Vol. 215. P. 543–573.

12. *Bloom St. L., Ésik Z.* Iteration Theories. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer, 1993.

13. *Bozapalidis S.* Effective construction of the syntactic algebra of a recognizable series on trees // Acta Inf. 1991. Vol. 28. P. 351–363.

14. *Bozapalidis S.* Alphabetic tree relations // Theoret. Comput. Sci. 1992. Vol. 99. P. 177–211.

15. *Bozapalidis S.* Convex algebras, convex modules and formal power series on trees // J. Automata, Languages and Combinatorics. 1996. Vol. 1. P. 165–180.

16. *Bozapalidis S.* Equational elements in additive algebras // Theory Comput. Systems. 1999. Vol. 32. P. 1–33.

17. *Bozapalidis S.* Context-free series on trees // Information and Computation. 2001. Vol. 169. P. 186–229.

18. *Bozapalidis S., Rahonis G.* On two families of forests // Acta Inf. 1994. Vol. 31. P. 235–260.

19. *Bucher W., Maurer H.* Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen. B. I. Wissenschaftsverlag, 1984.

20. *Comon H., Dauchet M., Gilleron R. et al* Tree Automata-Techniques and Applications. Manuscript.

21. *Courcelle B.* Equivalences and transformations of regular systems—Applications to recursive program schemes and grammars // Theor. Comp. Sci. 1986. Vol. 42. P. 1–122.

22. *Engelfriet J.* Bottom-up and top-down tree transformations–a comparison // Math. Systems Theory. 1975. Vol. 9. P. 198–231.

23. *Engelfriet J., Fülöp Z., Vogler H.* Bottom-up and Top-down Tree Series Transducers // J. Automata, Languages and Combinatorics. 2002. Vol. 7. P. 11–70.

24. *Engelfriet J., Schmidt E. M.* IO and OI // I. J. Comput. Systems Sci. 1977. Vol. 15. P. 328–353.

25. *Ésik Z.* Completeness of Park induction // Theor. Comput. Sci. 1997. Vol. 177. P. 217–283.

26. *Ésik Z., Kuich W.* Formal tree series // J. Automata, Languages and Combinatorics. 2003. Vol. 8. P. 219–285.

27. *Fischer M. J.* Grammars with macro-like productions // 9th Annual Symposium on Switching and Automata Theory. 1968. P. 131–142.

28. *Fülöp Z., Vogler H.* Syntax-Directed Semantics. Springer, 1998.

29. *Fülöp Z., Vogler H.* Tree series transformations that respect copying // Theory of Computing Systems. 2003. Vol. 36. P. 247–293.

30. *Gécseg F., Steinby M.* Tree Automata. Akademiai Kiado, 1984.

31. *Gécseg F., Steinby M.* Tree Languages // Handbook of Formal Languages. Springer, 1997. Vol. 3. Chapter 1. P. 1–68.

32. *Ginsburg S.* Algebraic and Automata-Theoretic Properties of Formal Languages. North-Holland, 1975.
33. *Grätzer G.* Universal Algebra. Springer, 1979.
34. *Gruska J.* A characterization of context-free languages // Journal of Computer and System Sciences. 1971. Vol. 5. P. 353–364.
35. *Guessarian I.* Algebraic Semantics // Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 99. Springer, 1981.
36. *Guessarian I.* Pushdown tree automata // Math. Systems Theory. 1983. Vol. 16. P. 237–263.
37. *Kuich W.* Semirings and formal power series: Their relevance to formal languages and automata theory // Handbook of Formal Languages. Springer, 1997. Vol. 1. Chapter 9. P. 609–677.
38. *Kuich W.* Gaußian elimination and a characterization of algebraic power series // MFCS 98, Lect. Notes Comput. Sci. 1998. Vol. 1450. P. 512–521.
39. *Kuich W.* Formal power series over trees // Proceedings of the 3rd International Conference Developments in Language Theory. Aristotle University of Thessaloniki, 1998. P. 61–101.
40. *Kuich W.* Tree transducers and formal tree series // Acta Cybernetica. 1999. Vol. 14. P. 135–149.
41. *Kuich W.* Full abstract families of tree series I //. Jewels are Forever. Springer, 1999. P. 145–156.
42. *Kuich W.* Abstract families of tree series II // Proceedings of the International Workshop on Grammar Systems 2000. Schlesische Universität Troppau, 2000. P. 347–358.
43. *Kuich W.* Formal series over algebras // Proceedings of MFCS 2000, Lect. Notes Comput. Sci. Springer, 1893. Vol. 2000. P. 488-496.
44. *Kuich W.* Pushdown tree automata, algebraic tree systems, and algebraic tree series // Information and Computation. 2001. Vol. 165. P. 69–99.
45. *Kuich W.* Formal power series over sorted algebras // Discrete Math. 2002. Vol. 254. P. 231–258.
46. *Kuich W., Salomaa A.* Semirings, Automata, Languages // EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Vol. 5. Springer, 1986.
47. *Lausch H., Nöbauer W.* Algebra of Polynomials. North-Holland, 1973.
48. *Rounds W. C.* Trees, transducers and transformations. PhD thesis. Stanford University, 1968.
49. *Rounds W. C.* Context-free grammars on trees // ACM Symposium on Theory of Computing, 1969. P. 143–148.
50. *Rounds W. C.* Mappings and grammars on trees // Math. Systems Theory. 1970. Vol. 4. P. 257–287.
51. *Salomaa A.* Formal Languages. Academic Press, 1973.
52. *Seidl H.* Deciding equivalence of finite tree automata // STACS88, Lect. Notes Comput. Sci. 1989. Vol. 349. P. 480–492.
53. *Thatcher J. W.* Generalized^2 sequential machine maps. IBM Research Report RC 2466, 1969.
54. *Thatcher J. W.* Generalized sequential machine maps // J. Comp. Syst. Sci. 1970. Vol. 4. P. 339–367.
55. *Thatcher J. W., Wright J. B.* Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second-order logic // Math. Systems Theory. 1968. Vol. 2. P. 57–81.
56. *Wechler W.* Universal Algebra for Computer Scientists // EATCS Monographs on Computer Science. Vol. 25. Springer, 1992.

Об авторах

Сергей Иванович Алешников — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: elliptec @mail.ru.

Юрий Федорович Болтнев — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: boltnev59@list.ru.

Золтан Език — д-р, Сегедский ун-т, Венгрия, e-mail: kuich @tuwien.ac.at.

Сергей Александрович Ишанов — д-р. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: sergey. ishanov@ya.ru.

Вернер Куих — д-р, Венский техн. ун-т, Австрия, e-mail: kuich @tuwien.ac.at.

Authors

Dr Sergey Aleshnikov – assistant professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: elliptec@ mail.ru.

Yuriy Boltnev – high instructor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: boltnev59@list.ru.

Dr Zoltán Ésik – University of Szeged, Hungary, e-mail: kuich @tuwien.ac.at.

Dr Sergey Ishanov – professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: sergey.ishanov@ya.ru.

Dr Werner Kuich – Technische Universitдt Wien, Austria, e-mail: kuich@tuwien.ac.at.