УДК 514.76

О.А. Монахова

(Пензенский государственный педагогический университет)

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ ЛИФТ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАССЛОЕНИЕ ДВАЖДЫ КОВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ

Построен горизонтальный лифт линейной связности на расслоение дважды ковариантных тензоров.

Рассмотрим гладкое класса C^∞ многообразие M_n и расслоенное пространство дважды ковариантных тензоров $T_2^0(M_n)$ над ним. Элемент расслоения — совокупность точки $p \in M_n$ и тензора t_p типа (0,2) в этой точке будем обозначать $\widetilde{p}$. Канонической проекцией служит отображение $\pi: T_2^0(M_n) \to M_n$, определенное по правилу $\pi(\widetilde{p}) = \pi(p, t_p) = p$.

Каноническая проекция позволяет ввести понятие вертикального лифта функций с базы в расслоенное пространство. Пусть *f* — гладкая функция на базе расслоенного пространства. Функция $f^V = f \circ \pi$ на расслоении $T_2^0(M_n)$ называется вертикальным лифтом функции *f*.

Гладкая структура базы порождает гладкую структуру на расслоенном пространстве. Пусть (U, x^i), $i = \overline{1,n}$ — произвольная локальная карта максимального атласа на базе M_n. Областями карт максимального атласа на расслоенном пространстве будут служить $\pi^{-1}(U)$ — полные прообразы при отображении π всевозможных открытых множеств U и их объединений на M_n. Определим в каждой точке $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ координатные функции:

— $(x^i)^V(\widetilde{p}) = p^i$ — координаты точки p в карте (U, x^i);

— $x_{jk}(\widetilde{p}) = t_{ij}$ — компоненты тензора t в точке $p \in U$.

Получили карту $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ на $T_2^0(M_n)$, индуцированную картой (U, x^i) на M_n. Совокупность таких карт, построенных для всех областей максимального атласа на базе, образует атлас на $T_2^0(M_n)$. Пусть точка $\widetilde{p}$ принадлежит пересечению областей двух карт $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ и $(\pi^{-1}(V), x^{i'}, x_{j'k'})$. Тогда закон преобразования координатных функций на $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ имеет вид

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \quad x_{j'k'} = x_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}.$$

С помощью объектов, заданных на базе расслоенного пространства, можно строить объекты на расслоении.

Пусть в локальной карте (U, x^i) тензорное поле $Q \in \Im_2^0(M_n)$ имеет разложение $Q = Q_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$. Векторное поле $Q^V = Q_{jk} \dfrac{\partial}{\partial x_{jk}}$ будет являться вертикальным.

Пусть на базе M_n в карте (U, x^i) задана линейная связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с компонентами Γ^i_{jk} и связность ∇ с компонентами $\Im^i_{jk}$ в натуральном репере. С помощью связности $\overset{\circ}{\nabla}$ можно построить горизонтальные лифты векторных полей, а также горизонтальный лифт ∇^H связности ∇ на расслоение дважды ковариантных тензоров.

Векторное поле

$$X^H = (X^k)^V \frac{\partial}{\partial x^k} + (X^s)^V((\Gamma^m_{si})^V x_{mj} + (\Gamma^h_{sj})^V x_{ih})\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

является горизонтальным лифтом векторного поля $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ на расслоение $T_2^0(M_n)$.

Утверждение 1. *На расслоении* $T_2^0(M_n)$ *существует единственная линейная связность* ∇^H*, удовлетворяющая условиям*

$$\nabla^H_{Q^V} W^V = 0, \quad \nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H,$$
$$\nabla^H_{Q^V} X^H = 0, \quad \nabla^H_{X^H} Q^V = (\nabla_X Q)^V \tag{1}$$

для любых тензорных полей $Q, W \in \Im_2^0(M_n)$*,* $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$*.*

Доказательство. В каждой локальной карте $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$ определим линейную связность ∇^H по закону:

$$\nabla^H_{\partial^{ij}} \partial^{ks} = 0, \ \nabla^H_{\partial_i^H} \partial_j^H = (\Im_{ij}^k)^V \partial_k^H, \ \nabla^H_{\partial^{ij}} \partial_k^H = 0,$$
$$\nabla^H_{\partial_i^H} \partial^{jk} = (-\Im_{ip}^j \delta_q^k - \Im_{iq}^k \delta_p^j)^V \partial^{pq}.$$

Используя законы преобразования компонент связности на базе и полей репера на расслоенном пространстве, а также свойства операции ковариантного дифференцирования, прямыми вычислениями можно показать, что определенная выше связность не зависит от выбора локальной карты.

Покажем, что построенная связность удовлетворяет условиям (1).

1. $\nabla^H_{Q^V} W^V = \nabla^H_{Q_{ij}\partial^{ij}} W_{ks}\partial^{ks} = Q_{ij}W_{ks}(\nabla^H_{\partial^{ij}}\partial^{ks}) + Q_{ij}\partial^{ij}(W_{ks})\partial^{ks} = 0.$

2. $\nabla^H_{Q^V} X^H = \nabla^H_{Q_{ij}\partial^{ij}} X^s\partial_s^H = Q_{ij}X^s(\nabla^H_{\partial^{ij}}\partial_s^H) + Q_{ij}\partial^{ij}(X^s)\partial_s^H = 0.$

3. $\nabla^H_{X^H} Y^H = \nabla^H_{X^i\partial_i^H} Y^j\partial_j^H = X^iY^j(\nabla^H_{\partial_i^H}\partial_j^H) + X^i\partial_i^H(Y^j)\partial_j^H =$

$= X^iY^j(\Im_{ij}^t\partial_t^H) + X^i\partial_i^H(Y^j)\partial_j^H = X^iY^j(\Im_{ij}^t\partial_t^H) + X^i\partial_i(Y^t)\partial_t^H =$

$= (\nabla_X Y)^H.$

4. $\nabla^H_{X^H} Q^V = \nabla^H_{X^i\partial_i^H} Q_{ks}\partial^{ks} = X^iQ_{ks}(\nabla^H_{\partial_i^H}\partial^{ks}) + X^i\partial_i^H(Q_{ks})\partial^{ks} =$

$= X^i Q_{ks}(-\Im^k_{ip}\delta^s_q - \Im^s_{iq}\delta^k_p)\partial^{pq} + X^i\partial_i(Q_{pq})\partial^{pq} = (\nabla_X Q)^V.$

Единственность. Предположим, что на расслоении существует связность $\tilde{\nabla}$, отличная от ∇^H и удовлетворяющая условиям (1). Разность $\widetilde{S} = \widetilde{\nabla} - \nabla^H$ является тензорным полем типа (1,2) на расслоении $T_2^0(M_n)$. Для того чтобы доказать, что $\widetilde{S} = 0$, прямыми вычислениями можно проверить, что $\widetilde{S}$ принимает значение 0 на всевозможных наборах векторных полей адаптированного репера.

Таким образом, утверждение 1 доказано.

Пусть на базе расслоенного пространства связность $\overset{\circ}{\nabla}$ имеет кручение $\overset{\circ}{T}$ и кривизну $\overset{\circ}{R}$, а связность ∇ — кручение T и кривизну R. Найдем кручение и кривизну построенного горизонтального лифта ∇^H связности на $T_2^0(M_n)$.

Утверждение 2. *Пусть $\widetilde{T}$ — тензор кручения связности ∇^H, тогда для произвольных тензорных полей Q, $W \in \Im_2^0(M_n)$, X, $Y \in \Im_0^1(M_n)$ верны следующие соотношения:*

$$\widetilde{T}(Q^V, W^V) = 0,\ \widetilde{T}(X^H, Q^V) = -\widetilde{T}(Q^V, X^H) = (\nabla_X Q - \overset{\circ}{\nabla}_X Q)^V,$$

$$\widetilde{T}(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H - (\overset{\circ}{R}(X,Y))^{V_1} - (\overset{\circ}{R}(X,Y))^{V_2},$$

где V_1, V_2 — обозначение специальных вертикальных лифтов тензорных полей типа (1,1) [1].

Для кривизны построенной связности имеет место

Утверждение 3. *Пусть $\widetilde{R}$ — тензор кривизны связности ∇^H, тогда для произвольных тензорных полей Q, U, $W \in \Im_2^0(M_n)$, X, Y, $Z \in \Im_0^1(M_n)$ имеют место следующие соотношения:*

$$\widetilde{R}(Q^V, W^V)U^V = 0,\ \widetilde{R}(Q^V, X^H)Y^H = 0,\ \widetilde{R}(Q^V, W^V)Y^H = 0,$$

$$\widetilde{R}(Q^V, X^H)W^V = 0,\ \widetilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = (R(X,Y)Z)^H,$$

$$\widetilde{R}(X^H, Y^H)Q^V = (-Q \overset{1}{\bullet} R(X,Y) - Q \overset{2}{\bullet} R(X,Y))^V.$$

Свертки $Q \overset{1}{\bullet} R(X,Y)$, $Q \overset{2}{\bullet} R(X,Y)$ - тензорные поля типа (0,2) — на базе определяются следующим образом: для любых векторных полей A, $B \in \Im_0^1(M_n)$

$$(Q\overset{1}{\bullet}R(X,Y))(A,B) = Q(R(X,Y)A,B),$$

$$(Q\overset{2}{\bullet}R(X,Y))(A,B) = Q(A,R(X,Y)B).$$

Список литературы

Монахова О.А. Вертикальные лифты тензорных полей типа (1,1) // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2000.

O. Monakhova

HORIZONTAL LIFT OF LINEAR CONNECTION ON THE BUNDLE OF THE TENSORS OF THE TYPE (0,2)

On the bundle of the tensors of the type (0,2) horizontal lift of linear connection is got.

УДК 514.76

О.М. Омельян

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОБЪЕКТ КРИВИЗНЫ ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА

Рассмотрено каноническое пространство проективной связности Картана со структурными уравнениями, которые обобщают соответствующие уравнения пространства аффинной связности. В пространстве проективной связности исследуется распределение плоскостей. Это распределение порождает ряд подтензоров