Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* О структурных уравнениях проективной группы // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 31. Калининград, 2000. С. 93—100.
2. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Вып. 5 (52). Чебоксары, 2006. С. 18—20.
3. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. М., 1979. Т. 9.
4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
5. *Белова О. О.* Связность 2-го типа в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 38. Калининград, 2007. С. 6—12.

O. Belova

BUNCH OF CONNECTIONS OF THE 1ST TYPE INDUCED BY THE ANALOG OF NORDEN'S NORMALIZATION OF GRASSMAN-LIKE MANIFOLD OF CENTERED PLANES

Grassman-like manifold of centered planes is considered in the projective space. A fundamental-group connection is given in the principal bundle. It is proved, that analog of Norden's normalization induces bunch of connections of the 1st type.

УДК 514.75

С. Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт, Калининград)

ПОЛЯ ПЛОСКОСТЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ В НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЯХ S-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Выясняются аналитические и геометрические признаки полей плоскостей, параллельных в нормальных связностях S-распределения [1], оснащенного в смысле Нордена — Картана [1—2] и Нордена — Бортолотти [3—5].

Ключевые слова: нормальная связность, распределение, подрасслоение, поле плоскостей, оснащение.

Схема использования индексов такова:

$$\alpha,\beta=\overline{m+1,n-1};\quad u,v=\overline{r+1,n-1};\quad \tilde{u},\tilde{v}=\overline{r+1,n};$$

$$p,q,t=\overline{1,r};\ \ i,j,k=\overline{r+1,m};\ \ \delta=\overline{0;1};\quad \varepsilon=\overline{0;15};\quad l=m-r.$$

Пусть на оснащенном в смысле Нордена — Картана и Нордена — Бортолотти S-распределении задано поле *k*-мерных ($k\le n-r$) плоскостей N_k, каждая из которых проходит через соответствующий центр A_0 распределения и лежит в соответствующей нормали 1-го рода: $N_k(A_0)\subset N_{n-r}(A_0)$.

Определение [6]. *Поле k-мерных плоскостей* $N_k(A_0)$ *называется параллельным в нормальной связности* $\overset{00}{\nabla}{}^{\perp}$, *если при инфинитезимальном перемещении точки* A_0 *вдоль любой кривой* λ

$$\lambda:\begin{cases}\omega_0^{\tilde{u}}=0,\quad \omega_0^p=\mu^p\theta,\quad D\theta=\theta\wedge\theta_0^0,\\ \nabla\mu^p-\mu^p(\omega_0^0+\theta_0^0)=\mu_1^p\theta,\end{cases}\tag{1}$$

принадлежащей базисному Λ-подрасслоению S-распределения, смещение *k*-мерной плоскости $N_k(A_0)$ происходит в (*k*+*r*)-мерной плоскости $N_{k+r}=[\Lambda(A_0),N_k(A_0)]$.

Если $N_1(A_0)$ — гладкое поле одномерных направлений $[A_0M]$, принадлежащее полю $N_{n-r}(A_0)$, то точка *M* имеет разложение

$$M=A_0+x^iA_i+x^\alpha A_\alpha+x^n\chi_n,\tag{2}$$

где $\chi_n=A_n+\nu_n^pA_p+\Lambda_n^uA_u$ и не все $x^{\tilde{u}}$ одновременно равны нулю. При $x^n=0$ это поле одномерных направлений $[A_0M]$ принадлежит полю характеристик $\Phi_{n-r-1}(A_0)$, при $x^i=x^n=0$ — χ-распределению, при $x^\alpha=x^n=0$ — *L*-распределению, а при $x^u=0$ совпадает с полем инвариантных прямых $[A_0,\chi_n]$.

Аналитическое условие параллельности поля одномерных направлений $N_1 = [A_0 M]$ в нормальной связности $\overset{00}{\nabla}{}^{\perp}$ дано в работе [6]:

$$dx^{\tilde{u}} + x^{\tilde{v}} \overset{00}{\theta}{}^{\tilde{u}}_{\tilde{v}} - x^{\tilde{u}} x^{\tilde{v}} \overset{00}{\theta}{}^{0}_{\tilde{v}} = x^{\tilde{u}} \theta \quad (mod\ \lambda), \quad D\theta = \theta \wedge \theta^{0}_{0}. \tag{3}$$

Аналогично условию (3) будем считать, что поле плоскостей $N_k \subset N_{n-r}$ параллельно в нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$, если выполняются условия:

$$dx^{\tilde{u}} + x^{\tilde{v}} \overset{\delta\varepsilon}{\theta}{}^{\tilde{u}}_{\tilde{v}} - x^{\tilde{u}} x^{\tilde{v}} \overset{\delta\varepsilon}{\theta}{}^{0}_{\tilde{v}} = x^{\tilde{u}} \theta \quad (mod\ \lambda), \quad D\theta = \theta \wedge \theta^{0}_{0}. \tag{4}$$

Условия (4) в силу равенств [5, ф. (17) — (18)]

$$\overset{00}{\theta}{}^{n}_{v} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \lambda) \tag{5}$$

тождественно выполняются при $x^n = 0$, поэтому поле характеристик Φ_{n-r-1} S-распределения параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$.

Из соотношений (4) следует, что поле инвариантных прямых $[A_0, \chi_n]$ $(x^u = 0)$ параллельно в нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства [3]:

$$\overset{\delta\varepsilon}{\theta}{}^{u}_{n} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \lambda) \Leftrightarrow A^{u}_{nq} \overset{def}{=} \nu^{p}_{n} C^{u}_{pq} + \lambda^{u}_{nq} = 0\,. \tag{6}$$

Если положить $x^i = x^n = 0$ в соотношениях (4), то получим

$$\overset{\delta\varepsilon}{\theta}{}^{i}_{\alpha} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \lambda)\,, \tag{7}$$

то есть поле χ-плоскостей параллельно в нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$. В силу соотношений (1) [5, ф. (3), (17), (18)] условия (7) равносильны следующим:

$$\omega^{i}_{\alpha} = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \lambda) \Leftrightarrow \Lambda^{i}_{\alpha p} = 0\,. \tag{8}$$

Условия (8) выполняются, если:

1) Ψ-распределение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, χ) [1];

2) распределение $\Psi(\chi)$ взаимно [3];

3) S-распределение представляет собой $(l+1)$-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос H^{r}_{n-l-1} [1].

Аналогично поле плоскостей L параллельно (при $x^{\alpha} = x^{n} = 0$) в каждой нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда

$$\overset{\delta\varepsilon}{\theta}{}^{\alpha}_{i} = 0 \quad (\mathrm{mod}\,\lambda) \Leftrightarrow \omega^{\alpha}_{i} = 0 \quad (\mathrm{mod}\,\lambda) \Leftrightarrow \lambda^{\alpha}_{ip} = 0\,. \tag{9}$$

Условия (9) выполняются, например, когда:

1) M-подрасслоение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, L) [1];

2) распределение $M(L)$ взаимно [3];

3) S-распределение представляет собой $(n\text{-}m)$-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос H^{r}_{m} [1].

Учтем, что S-распределение оснащено в смысле Нордена — Бортолотти. Нормаль 2-го рода N_{r-1} можно определить [3] как пересечение $n-r+1$ гиперплоскостей

$$\xi_0 = H_{n-1}, \quad \xi_v, \quad \eta_n = \xi_n - \Lambda^{pq}_{n}\, \nu^{\,0}_{q}\, \xi_p + \Lambda^{vu}_{n}\, \lambda^{\,0}_{u}\, \xi_v\,,$$

где $\xi_{\bar{J}}$ — элементы тангенциального репера.

По аналогии с соотношениями (4) поле проходящих через нормаль 2-го рода N_{r-1} t-мерных плоскостей N_t $(t \geq r-1)$ будем называть параллельным в нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$, если выполняются условия:

$$dx^{\tilde{u}} + x^{\tilde{v}}\, \overset{\delta\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{\tilde{u}}_{\tilde{v}} - x^{\tilde{u}} x^{\tilde{v}}\, \overset{\delta\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{0}_{\tilde{v}} = x^{\tilde{u}}\overline{\theta} \quad (\mathrm{mod}\,\lambda), \quad D\overline{\theta} = \overline{\theta} \wedge \overline{\theta}{}^{0}_{0}\,, \tag{10}$$

где $x^{\tilde{u}}$ — коэффициенты разложения проходящей через нормаль 2-го рода N_{r-1} гиперплоскости μ:

$$\mu = \xi_0 + x^u \xi_u + x^n \eta_n \,. \tag{11}$$

Так как характеристика $\Phi_{n-r-1}(A_0)$ и плоскость $\Lambda(A_0)$ двойственны по отношению друг к другу, то поле r-мерных плоскостей базисного Λ-подрасслоения параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$.

Из соотношений (10) получаем, что аналитическое условие параллельности в связности $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ поля инвариантных ($n-2$)-мерных плоскостей $[\xi_0, \eta_n]$, каждая из которых содержит соответствующую нормаль 2-го рода N_{r-1}, эквивалентно равенству нулю форм $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{v}_{n}$ [3]:

$$\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{v}_{n} = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \lambda) \Leftrightarrow A^{\,s}_{nv}(\nu) \overset{def}{=} \nu^0_p \, \lambda^{\,ps}_{nv} + \lambda^{\,0}_{vq} \Lambda^{\,qs}_{n} \,. \tag{12}$$

Учитывая, что характеристика $\Psi_{n-l-1}(A_0)$ и плоскость $L_{m-r}(A_0)$ двойственны по отношению друг к другу, поле Ψ-плоскостей в каждой нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ параллельно тогда и только тогда, когда [5, ф. (3), (17), (18)]

$$\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{v}_{n} = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \lambda) \Leftrightarrow \overline{\Lambda}{}^{\alpha}_{ip} = 0 \Leftrightarrow \Lambda^{\,i}_{\alpha p} = 0 \,. \tag{13}$$

Аналогично, учитывая, что характеристика $\chi_{n-m-1}(A_0)$ и плоскость $M(A_0)$ двойственны, поле m-мерных плоскостей M параллельно в каждой нормальной связности $\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ тогда и только тогда, когда

$$\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\theta}}{}^{i}_{\alpha} = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \lambda) \Leftrightarrow \overline{\Lambda}{}^{i}_{\alpha p} = 0 \Leftrightarrow \Lambda^{\,\alpha}_{ip} = 0 \,. \tag{14}$$

Резюмируя полученные результаты, получаем следующие теоремы.

Теорема 1. *Поле L-плоскостей (M-плоскостей) переносится параллельно в каждой нормальной связности* $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$) *тогда и только тогда, когда выполняются условия (9) [(14)], которые имеют следующую геометрическую интерпретацию:*

1) M-подрасслоение несет двухкомпонентную сопряженную систему (Λ, *L*);

2) M(L)-подрасслоение взаимно;

3) S-распределение представляет собой (n-m)-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос H^{r}_{m}.

Теорема 2. *Поле* χ*-плоскостей (*Ψ*-плоскостей) переносится параллельно в каждой нормальной связности* $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}$ ($\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$) *тогда и только тогда, когда выполняются условия (8) [(13)], которые имеют следующую геометрическую интерпретацию:*

1) Ψ*-подрасслоение несет двухкомпонентную сопряженную систему* (Λ, χ);

2) $\Psi(\chi)$*-подрасслоение взаимно;*

3) S-распределение представляет собой ($l+1$)*-параметрическое семейство тангенциально вырожденных гиперполос* H^{r}_{n-l-1}.

Список литературы

1. *Волкова С. Ю.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов S-распределения. Деп. в ВИНИТИ РАН, 2001. №343-В2001.

2. *Волкова С. Ю.* Нормальные связности на S-распределении, ассоциированные с базисным Λ-подрасслоением // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Вып. 5. Чебоксары, 2006. С. 20—26.

3. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: монография. Чебоксары, 1994.

4. *Волкова С. Ю.* Двойственные нормальные связности на S-подрасслоении, ассоциированные с базисным Λ-подрасслоением // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 38. Калининград, 2007. С. 17—27.

5. *Волкова С. Ю.* Введение нормальных связностей на S-распределении // Там же. Вып. 36. 2005. С. 18—25.

6. *Столяров А. В.* Двойственные нормальные связности на регулярной неголономной гиперполосе // Изв. НАНИ ЧР (физ.-мат. науки). 1996. №6. С. 9—14.

S. Volkova

PLANE FIELDS PARALLEL IN NORMAL CONNECTIONS OF S-DISTRIBUTION

Analytical and geometrical signs of fields of plane parallel in normal connections of S-distributions are found out.

УДК 514.75

С. Ю. Волкова, Ю. И. Попов

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

ПОЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ОХВАЧЕННЫХ ОБЪЕКТОВ КООСНАЩЕННОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Приведено задание нормально s-кооснащенной гиперполосы ${}^{s}H_m$ в репере 1-го порядка R_1 и доказана теорема существования гиперполосы ${}^{s}H_m$. Построены поля плоскостей Нордена — Тимофеева [4] и поля геометрических объектов в дифференциальных окрестностях 2-го и 3-го порядков гиперполосы ${}^{s}H_m$.

Ключевые слова: регулярная гиперполоса, форма, многообразие, нормаль, геометрический объект, квазитензор, тензор, дифференциальное уравнение.

В данной статье используется следующая схема индексов:

$$i,j,k=\overline{1,m}\,;\; I,J,K=\overline{0,n}\,;\; \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}\,;\; s=m-r\,;$$

$$\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n}\,;\; p,q,r,s,t=\overline{1,s}\,;\; a,b,c,d,e,f=\overline{s+1,m}\,.$$