УДК 514.75

А. В. Кулешов[1]
[1] Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
arturkuleshov@yandex.ru

О линейной факторгруппе центропроективной группы

Рассматривается центропроективная группа G, то есть стабилизатор фиксированной точки A n-мерного проективного пространства P_n $(n > 1)$ в группе $GP(n)$ проективных преобразований данного пространства. Построены два точных представления линейной факторгруппы группы G: 1) на линейных реперах, то есть базисах касательного векторного пространства к P_n в точке A; 2) на классах эквивалентных проективных реперов пространства P_n. Установлен изоморфизм между данными представлениями и дана геометрическая интерпретация принадлежности проективных реперов одному классу.

Ключевые слова: проективное пространство, проективный репер, группа проективных преобразований, факторгруппа Ли, представление группы Ли, пространство орбит, теорема Дезарга.

Введение

В статьях [1—4] фигурирует линейная факторгруппа $GL(m)$ подгруппы стационарности G центрированной проективной плоскости $L_m^* = (L_m, A)$, неэффективно действующая в связке прямых, проходящих через центр A данной плоскости. В силу специфики метода подвижного репера и внешних форм Э. Картана, применяемого в указанных работах, описание дан-

---

Поступила в редакцию 24.05.2018 г.

ной факторгруппы исчерпывается ее структурными уравнениями. На наш взгляд, однако, представляет несомненный интерес детальное изучение вышеуказанной группы и построение ее эффективного действия на геометрических образах, «ассоциированных» с плоскостью L_m^*. В частности, нас интересует явная конструкция соответствующего нормального делителя H и геометрическое описание орбит проективных реперов под действием элементов из H. Именно такие H-орбиты как целое переводятся друг в друга под действием элементов факторгруппы.

Все многообразия, рассматриваемые ниже, принадлежат классу C^{ω}, а все группы являются группами Ли.

По повторяющимся верхнему и нижнему индексам производится суммирование согласно правилу Эйнштейна.

Классы α-эквивалентности проективных реперов и базисы касательного пространства к P_n

Пусть P_n — проективное пространство размерности $n \geq 2$, A — его точка, которую мы считаем фиксированной; $F(P_n)$ — многообразие всех проективных реперов вида $\Re = \{A_0, A_1, ..., A_n, E\}$, таких, что $A_0 = A$; $V = T_A(P_n)$ — векторное касательное пространство к P_n как к гладкому многообразию в его точке A; $F(V)$ — многообразие всех линейных реперов (то есть базисов) пространства V; $G = GP^*(n)$ — стабилизатор точки A в группе $GP(n)$ проективных преобразований пространства P_n; $GL(V)$ — группа невырожденных линейных операторов, действующих в пространстве V.

Пусть $\Re \in F(P_n)$ и $\varepsilon \in F(V)$, причем

$$\Re = \{A_0, A_1, ..., A_n, E\}, \ \varepsilon = \{\vec{e}_1, \ ..., \ \vec{e}_n\}.$$

Обозначим

$$f \cdot \Re = \{f(A_0), f(A_1), ..., f(A_n), f(E)\},$$

$$\psi \cdot \varepsilon = \{\psi(\vec{e}_1), ..., \psi(\vec{e}_n)\},$$

где $f \in G$, $\psi \in GL(V)$. Тем самым определены свободные и транзитивные действия групп G и $GL(V)$ на $F(P_n)$ и $F(V)$ соответственно.

Как известно, каждый репер $\Re \in F(P_n)$ порождает аффинную карту $\varphi_\Re$ некоторой открытой окрестности U точки A:

$$M(x_0 : x_1 : ... : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}\right),$$

где $(x_0 : x_1 : ... : x_n)$ — однородные координаты точки $M \in U$ в репере $\Re$. В свою очередь, каждая карта φ на области U порождает натуральный базис $\varepsilon(\varphi) = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ пространства V. Таким образом, определена сюръективная субмерсия $\alpha : F(P_n) \to F(V)$, действующая по закону $\Re \mapsto \varepsilon(\varphi_\Re)$.

Определение 1. *Два репера* $\Re$ *и* $\Re'$ назовем α*-эквивалентными* ($\Re \overset{\alpha}{\sim} \Re'$), если $\alpha(\Re) = \alpha(\Re')$.

Класс α-эквивалентности репера $\Re$ обозначим через $[\Re]$. Многообразие $\Phi = F(P_n)/\sim$ всех таких классов является образом $F(P_n)$ относительно канонической проекции $p : \Re \mapsto [\Re]$. Тогда существует единственный диффеоморфизм $\overline{\alpha} : \Phi \to F(V)$, такой, что $\overline{\alpha} \circ p = \alpha$, он действует по правилу $\overline{\alpha} : [\Re] \to \varepsilon(\varphi_\Re)$.

Эквивалентность двух представлений линейной факторгруппы

Поскольку для любого $f \in G$ справедливо $f(A) = A$, корректно определен гомоморфизм групп Ли $\beta : G \to GL(V)$, действующий по закону $\beta : f \mapsto d_A f$. Тогда $H = \ker \beta$ — нормальный делитель группы G, причем $\overline{\beta}: fH \mapsto d_A f$ — канонический изоморфизм групп Ли G/H и $GL(V)$. Это позволяет отождествить данные группы и обозначить их общим символом $\overline{G}$.

Определение 2. Группу $\overline{G}$ будем называть *линейной факторгруппой группы G*.

Легко видеть, что класс $[\mathfrak{R}]$ есть орбита репера $\mathfrak{R}$ по действию H на $F(P_n)$. Иными словами, $\mathfrak{R} \overset{\alpha}{\sim} \mathfrak{R}'$ тогда и только тогда, когда найдется $h \in H$ такое, что $h(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$. Тогда на Φ корректно определено свободное транзитивное действие группы $\overline{G}$ по правилу $fH: [\mathfrak{R}] \mapsto [f \cdot \mathfrak{R}]$ для любого $f \in G$.

Заметим, что поскольку следующие две диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{fH} & \Phi \\ \uparrow^{p} & & \uparrow^{p} \\ F(P_n) & \xrightarrow{f} & F(P_n) \\ \downarrow^{\alpha} & & \downarrow^{\alpha} \\ F(V) & \xrightarrow{d_A f} & F(V) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(P_n) & \xrightarrow{p} & \Phi \\ \downarrow^{\alpha} & & \downarrow^{\overline{\alpha}} \\ F(V) & = & F(V) \end{array},$$

то коммутативна и третья диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{fH} & \Phi \\ \downarrow^{\overline{\alpha}} & & \downarrow^{\overline{\alpha}} \\ F(V) & \xrightarrow{d_A f} & F(V), \end{array}$$

откуда, в свою очередь, вытекает

Утверждение 1. *Многообразия* Φ *и* $F(V)$ *изоморфны как пространства представления группы* $\overline{G}$.

Этим установлена эквивалентность двух действий линейной факторгруппы $\overline{G}$ группы G — на многообразии Φ классов проективных реперов и на многообразии $F(V)$ линейных реперов пространства V. Данный факт позволяет интерпретировать линейные реперы как классы α-эквивалентных проективных реперов.

Координатное представление преобразований, принадлежащих нормальному делителю *H*

Зафиксируем некоторый репер $\Re = \{A_0, A_1, ..., A_n, E\}$, где $A_0 = A$. Пусть $(x^0 : x^1 : ... : x^n)$ — однородные координаты пространства P_n в этом репере, $(X^1, ..., X^n)$ — соответствующие неоднородные координаты точек пространства P_n в некоторой окрестности U точки A:

$$X^i = \frac{x^i}{x^0}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда уравнения преобразования $f \in G$ в однородных координатах относительно репера $\Re$ имеют вид

$$\lambda\tilde{x}^0 = a_0^0 x^0 + a_j^0 x^j, \quad \lambda\tilde{x}^i = a_j^i x^j \ (i = \overline{1, n}),$$

где $\lambda \neq 0$, $a_0^0 \neq 0$, а в неоднородных координатах —

$$\tilde{X}^i = \frac{b_j^i X^j}{1 + b_j^0 x^j},$$

где $b_j^i = \dfrac{a_j^i}{a_0^0}$, $b_i^0 = \dfrac{a_i^0}{a_0^0}$.

Отсюда следует, что матрица Якоби преобразования f имеет следующие элементы:

$$\frac{\partial \tilde{X}^i}{\partial X^j}(A_0) = b_j^i.$$

Значит, $f \in H$ тогда и только тогда, когда $b_j^i = \delta_j^i$. Таким образом, справедливо

Утверждение 2. *Уравнения произвольного преобразования* $f \in H$ *имеют вид*

1) *в однородных координатах:*

$$\lambda \tilde{x}^0 = a_0^0 x^0 + a_j^0 x^j, \quad \lambda \tilde{x}^i = a_0^0 x^i \ (i = \overline{1, n});$$

2) *в неоднородных координатах:* $\tilde{X}^i = \dfrac{X^i}{1 + b_j^0 x^j}$.

Геометрический смысл отношения α-эквивалентности проективных реперов

Пусть $\Re, \Re' \in F(P_n)$, причем

$$\Re = \{A_0, A_1, ..., A_n, E\}, \ \Re' = \{A'_0, A'_1, ..., A'_n, E'\},$$

где $A_0 = A'_0 = A$. Следуя аксиоматике Вейля n-мерного проективного пространства, рассмотрим $(n + 1)$-мерное векторное пространство V_{n+1}, ассоциированное с P_n, а через $\pi : V_{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \to P_n$ обозначим каноническую сюръекцию. Введем в рассмотрение базисы $\vec{\Re}$ и $\vec{\Re}'$, порождающие реперы $\Re$ и $\Re'$ соответственно:

$$\vec{\Re} = \{\vec{A}_0, \vec{A}_1, ..., \vec{A}_n\}, \quad \vec{\Re}' = \{\vec{A}'_0, \vec{A}'_1, ..., \vec{A}'_n\}. \tag{1}$$

Тогда

$$\pi(\vec{A}_0) = A_0, \ \pi(\vec{A}_i) = A_i, \ \pi(\vec{A}'_0) = A'_0, \ \pi(\vec{A}'_i) = A'_i,$$

$$\pi(\vec{E}) = E, \ \pi(\vec{E}') = E', \ i = \overline{1, n},$$

где

$$\vec{E} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 + ... + \vec{A}_n, \ \vec{E}' = \vec{A}'_0 + \vec{A}'_1 + ... + \vec{A}'_n.$$

Определение 3. Реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ назовем *перспективными друг другу*, если $A_i' \in A_i A_0$ ($i = 1, 2, ..., n$) и $E' \in EA_0$.

Утверждение 3. *Если реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ перспективны друг другу, то найдутся базисы (1), порождающие данные реперы, такие, что для некоторых чисел $\lambda, a_1, ..., a_n, e$ ($\lambda \neq 0$) справедливы равенства*

$$\lambda \vec{A}_0' = \vec{A}_0 ,\ \lambda \vec{A}_i' = a_i \vec{A}_0 + \vec{A}_i ,\lambda \vec{E}' = e \quad \vec{A}_0 + \vec{E} ,i = \overline{1,n} . \quad (2)$$

Теорема 1. *1. Если реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ α-эквивалентны, то они перспективны друг другу. 2. Пусть реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ перспективны друг другу. Тогда для того, чтобы эти реперы были α-эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы в обозначениях утверждения 3 выполнялось равенство*

$$e = a_1 + ... + a_n . \quad (3)$$

Определение 4. Реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ назовем *строго перспективными друг другу*, если они перспективны, и при этом $A_i \neq A_i'$ ($i = 1, 2, ..., n$) и $E \neq E'$.

Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ — строго перспективные друг другу реперы. Тогда

1) для любых $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, ..., n$) $A_i A_j$ и $A_i' A_j'$ — различные прямые, лежащие в одной плоскости $AA_i A_j$;

2) для любого $i = 1, 2, ..., n$ $A_i E$ и $A_i' E'$ — различные прямые, лежащие в одной плоскости $AA_i E$.

Через $L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$ обозначим минимальное (по включению) подпространство в P_n, содержащее совокупность точек B_{ij}, B_i, где

$$B_{ij} = A_i A_j \cap A_i' A_j' , \quad B_i = A_i E \cap A_i' E' , \quad 1 \leq i < j \leq n .$$

Теорема 2. $L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$ *является гиперплоскостью для любых строго перспективных друг другу реперов $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$.*

Доказательство. В случае $n = 2$ утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы Дезарга (см., напр., [5]). Далее будем считать, что $n > 2$. Для любых s геометрических образов (каждый из которых — точка либо плоскость) $Y_1, ..., Y_s \in P_n$ обозначим через $L(Y_1, ..., Y_s)$ минимальную (по включению) плоскость в P_n, содержащую всю совокупность данных образов. Тогда для $1 \le i < j \le n$ имеем

$$B_{ij} \in A_i A_j \subset L(A_1, ..., A_n) \overset{def}{=} L,$$

$$B_{ij} \in A'_i A'_j \subset L(A'_1, ..., A'_n) \overset{def}{=} L'.$$

Тогда $B_{ij} \in L \cap L'$, причем $\dim L \cap L' = n - 2$ в силу условия теоремы. Далее рассмотрим 3-плоскость

$$L_{ij} = L(A_0 A_i, A_0 A_j, A_0 E).$$

Лежащие в ней 2-плоскости $L(A_i, A_j, E)$ и $L(A'_i, A'_j, E')$ пересекаются по прямой, содержащей точки B_{ij}, B_i и B_j. Значит, точка B_j лежит на прямой $B_{ij} B_i$ для любых $i < j$. Возьмем теперь точку B_1. Очевидно, что $B_1 \notin L \cap L'$. Тогда $\dim L(B_1, L \cap L') = n - 1$. При этом каждая точка B_j лежит в $L(B_1, L \cap L')$. Значит, $L(B_1, L \cap L') \supseteq L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$. Очевидно, что справедливо и обратное включение. Таким образом, $L(B_1, L \cap L') = L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 1 является обобщением классической теоремы Дезарга на многомерный случай.

Теорема 3. *Пусть реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ строго перспективны. В этом случае они α-эквивалентны тогда и только тогда, когда гиперплоскость $L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$ проходит через точку A.*

Доказательство. Пусть реперы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ строго перспективны. Тогда они перспективны, а значит, найдутся базисы

(1), порождающие данные реперы, такие, что для некоторых чисел $\lambda, a_1, ..., a_n, e$ ($\lambda \neq 0$) справедливы равенства (2). Пусть $(x^0 : x^1 : ... : x^n)$ — однородные координаты пространства P_n в репере $\Re$. Тогда в этих координатах гиперплоскости L и L' задаются соответственно уравнениями

$$L : x^0 = 0, \quad L' : a_i x^i - x^0 = 0,$$

а их пересечение $L \cap L'$ определяется системой уравнений

$$L \cap L' : x^0 = 0, \quad a_i x^i - x^0 = 0.$$

Таким образом, уравнение пучка S гиперплоскостей $S_{(\lambda:\mu)}$, проходящих через $L \cap L'$, можно представить в виде

$$S_{(\lambda:\mu)} : \lambda x^0 + \mu\, a_i x^i = 0, \tag{4}$$

где λ и μ одновременно не обращаются в нуль.

Для точки B_1 можно подобрать такой вектор $\vec{B}_1 \in \pi^{-1}(B_1)$, что

$$\vec{B}_1 = -\frac{e}{a_1}\vec{A}_1 + \vec{E}\,. \tag{5}$$

Гиперплоскость $L_{(\Re,\Re')}$ выделяется из пучка S условием $B_1 \in S_{(\lambda:\mu)}$, которое, в свою очередь, накладывает связь на параметры λ и μ:

$$\lambda = \left(e - \sum_{i=1}^{n} a_i \right)\mu\,.$$

Подставляя это соотношение в (4), получаем уравнение гиперплоскости $L_{(\Re,\Re')}$:

$$L_{(\Re,\Re')} : \left(e - \sum_{i=1}^{n} a_i \right) x^0 + \mu\, a_i x^i = 0\,. \tag{6}$$

Из уравнения (6) видим, что $A_0 \in L_{(\mathfrak{R},\mathfrak{R}')}$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство (3). Теорема доказана.

Заключение

Результаты, полученные в настоящей работе, демонстрируют взаимосвязь классической проективной геометрии (в частности, теоремы Дезарга) с теорией представлений групп Ли. Таким образом, они открывают возможность более детальной по сравнению с [1—4] геометрической интерпретации результатов аналитических выкладок в проективной дифференциальной геометрии. В первую очередь это касается изучения аффинных связностей на различных семействах центрированных плоскостей в проективном пространстве.

Список литературы

1. *Белова О.О.* Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 29—67.

2. *Кулешов А.В.* Шесть типов индуцированной групповой связности на семействе центрированных плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2009. Вып. 40. С. 72—84.

3. *Омельян О.М.*, *Шевченко Ю.И.* Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей // Математические заметки. 2008. Т. 84, вып. 1. С. 99—107.

4. *Полякова К.В.* Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, вып. 2. С. 129—177.

5. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. 7-е изд. М., 2003.

A. Kuleshov[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
arturkuleshov@yandex.ru

On some interpretation of linear frames in projective differential geometry

Submitted on May 24, 2018

The centroprojective group, i. e. the stabilizer G of a fixed point A in the group $GP(n)$ of projective transformations of n-dimensional projective space P_n ($n > 1$) is considered in the paper. Two faithful representations of the linear quotient group of G are constructed: 1) the first one is on the linear frames, i. e. bases of tangent vector space to P_n at A; 2) the second one is on the equivalence classes of projective frames of P_n. It is shown that these representations are isomorphic. Geometrical interpretation for two frames to be equivalent is given.

Keywords: projective space, projective frame, the projective transformations group, quotient Lie group, Lie group representation, orbit space, the Desargues theorem.

References

1. *Belova, O. O.*: Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

2. *Kuleshov, A. V.*: Six types of induced group connection on the family of centered planes in projective space. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 40, 72—84 (2009) (in Russian).

3. *Omelyan ,O. M., Shevchenko, Yu. I.*: Reductions of the centroprojective connection object and the affine torsion tensor on a plane distribution. Math. Notes, **84**:1, 100—107 (2008).

4. *Polyakova, K. V.*: Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 129—177(2009).

5. *Efimov, N. V.*: Higher geometry. FIZMATLIT, Moscow (2003) (in Russian).