УДК 514.75

О НОРМАЛЯХ НОРДЕНА-ЧАКМАЗЯНА ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в, С.Н.Ю р ь е в а

(Калининградский государственный университет)

В данной работе продолжаются исследования полей геоме рических объектов регулярного гиперполосного распределения [6] в аффинном пространстве A_n, которые названы нами $\mathcal{H}$ распределениями. В § 1 в целях полноты изложения приведено дание $\mathcal{H}$-распределения в репере 1-го порядка $\mathcal{R}^1$. Рассм риваются многообразия фокальных точек конуса $K(H)$ асимпто ческих направлений оснащающего H-распределения (§ 2), по роения которых ассоциированы с распределением нормалей Мих леску 1-го рода $\mathcal{M}$ (в окрестности 2-го порядка) и с распр лением нормалей Фубини 1-го рода $\vec{\Phi}$ [6] (в окрестности 3 порядка). Выясняется геометрический смысл этих многообрази (теоремы 2 и 3), принадлежащих основным структурным подрас ениям данного $\mathcal{H}$-распределения. Показано (§ 3, § 4), что дифференциальных окрестностях 2-го (3-го) порядка можно пос роить для $\mathcal{H}$-распределения по 3 пучка его нормалей 1-го 2-го рода в смысле Нордена-Чакмазяна, соответствующих друг другу относительно проективитета Бомпьяни-Пантази [5], [6 Выясняется геометрический смысл нормали Н.М.Остиану $\mathcal{K}^a_n$ 1- рода H-распределения (§ 4).

В работе используется следующая схема индексов:

$$i,j,k=\overline{1,m};\quad \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\quad \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma=\overline{m+1,n};\quad a,b,c,d,e,f=\overline{1,n-1};$$
$$I,J,K,L,M=\overline{1,n}.$$

§ 1. Дифференциальные уравнения гиперполосного распределения аффинного пространства

1.Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n со структурными уравнениями

$$D\omega^I=\omega^L\wedge\omega^I_L,\qquad D\omega^K_J=\omega^L_J\wedge\omega^K_L,\qquad (1.1)$$

отнесенное к подвижному реперу $(A,\vec e_1,\vec e_2,\dots,\vec e_n)$, дифференциа ные уравнения инфинитезимального перемещения которого име

д:
$$d\vec A=\omega^J\vec e_J,\qquad d\vec e_J=\omega^L_J\vec e_L.\qquad (1.2)$$

Пусть m-мерная плоскость $\Lambda(A)$ задана линейно независи ми векторами

$$\vec m_i=\vec e_i+\Lambda^{\hat\alpha}_i\vec e_{\hat\alpha}.\qquad (1.3)$$

руктурные формы многообразия m-мерных плоскостей $\Lambda(A)$ аф нного пространства можно представить в виде

$$\Delta\Lambda^{\hat\alpha}_i=\nabla\Lambda^{\hat\alpha}_i-\Lambda^{\hat\beta}_i\Lambda^{\hat\alpha}_j\,\omega^j_{\hat\beta}+\omega^{\hat\alpha}_i.\qquad (1.4)$$

алогично, формы

$$\Delta H^n_a=\nabla H^n_a-H^n_aH^n_b\,\omega^b_n+\omega^n_a\qquad (1.5)$$

вляются структурными формами многообразия гиперплоскостей $H(A)$, каждую из которых зададим $(n-1)$ линейно независимыми екторами

$$\vec h_a=\vec e_a+H^n_a\vec e_n.\qquad (1.6)$$

Известно [3], [4], [7], что n-мерные погруженные мно ообразия в пространствах представлений $\{\Delta\Lambda^{\hat\alpha}_i,\omega^J\}$, $\{\Delta H^n_a,\omega^J\}$, пределяемые дифференциальными уравнениями

$$\Delta\Lambda^{\hat\alpha}_i=\Lambda^{\hat\alpha}_{iL}\,\omega^L,\quad \Delta H^n_a=H^n_{aL}\,\omega^L,\qquad (1.7)$$

зываются распределениями соответственно m-мерных плоскос ей и гиперплоскостей.

Потребуем, чтобы в некоторой области пространства A_n ля любого центра A имело место соотношение $\Lambda(A)\subset H(A)$. Пара рас ределений (1.7) с таким соотношением инцидентности их соот етствующих элементов называется гиперполосным распределением $\mathcal{H}(M)$ или $\mathcal{H}$-распределением [6],[7]. При этом распределение лоскостей $\Lambda(A)$ называется базисным распределением (или Λ-аспределением), а распределение гиперплоскостей $H(A)$ – оснащающим распределнием (или H-распределением) [6].

Требование $\Lambda(A)\subset H(A)$ приводит к равенству

$$\vec m_i=x^a_i\vec h_a,$$

з которого в силу соотношений (1.3), (1.6) и линейной независимости базисных векторов $\vec e_J$ следует

$$\Lambda^n_i=H^n_i+\Lambda^\alpha_iH^n_\alpha.\qquad (1.8)$$

оотношение (1.8) определяет условие инцидентности плоскости $\Lambda(A)$ и гиперплоскости $H(A)$: $A\in\Lambda(A)\subset H(A)$.

Произведем следующую канонизацию репера $\{A,\vec e_J\}$: поместим екторы $\{\vec e_a\}$ в плоскость $H(A)$, а векторы $\{\vec e_i\}$ – в плоскость

$\Lambda(A)$. В выбранном репере нулевого порядка $\mathcal{R}^0$, как след
из (I.3) и (I.6), $\Lambda^{\hat\alpha}_i = 0$ и $H^n_a = 0$, а структурные формы (I.
(I.5) принимают вид

$$\Delta\Lambda^{\hat\alpha}_i = \omega^{\hat\alpha}_i, \quad \Delta H^n_a = \omega^n_a. \qquad (I.9)$$

Из (I.7) и (I.9) находим

$$\omega^n_i = \Lambda_{iL}\,\omega^L = H^n_{iL}\,\omega^L, \qquad (I.10)$$

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iL}\,\omega^L, \qquad (I.11)$$

$$\omega^n_\alpha = H^n_{\alpha L}\,\omega^L, \qquad (I.12)$$

причем функции $\{\Lambda^n_{iL}\},\{\Lambda^\alpha_{iL}\},\{H^n_{\alpha L}\}$ удовлетворяют соответствен
уравнениям

$$\nabla\Lambda^n_{iL} = \Lambda^n_{iLK}\,\omega^K, \qquad (I.13)$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{iL} + \Lambda^n_{iL}\,\omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{iLK}\,\omega^K, \qquad (I.14)$$

$$\nabla H^n_{\alpha L} - \Lambda^n_{iL}\,\omega^i_\alpha = H^n_{\alpha LK}\,\omega^K. \qquad (I.15)$$

Итак, относительно репера $\mathcal{R}^0$ $\mathcal{H}$-распределение задается уравнениями (I.10) – (I.15), а геометрический объект $\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{iL},\Lambda^\alpha_{iL},H^n_{\alpha L}\}$ является его фундаментальным объектом I-го поря
ка [6]. Имеет место теорема существования $\mathcal{H}$-распределен

Т е о р е м а I. Регулярное $\mathcal{H}$-распределение аффинн
пространства A_n существует с произволом $m+(m+1)(n-m-1)$ ф
кций n аргументов.

2. Для регулярного $\mathcal{H}$-распределения [6] согласно ле
Н.М.Остиану [8] возможна частичная канонизация репера $\mathcal{R}^0$
как это следует из дифференциальных уравнений

$$\nabla H^n_{\alpha j} - \Lambda^n_{ij}\,\omega^i_\alpha = H^n_{\alpha jK}\,\omega^K. \qquad (I.16)$$

Действительно, полагая $H^n_{\alpha j} = 0$, мы разрешим уравнения (I.1
относительно форм ω^i_α:

$$\omega^i_\alpha = -\Lambda^{ji}_n H^n_{\alpha jK}\,\omega^K \overset{def}{=} H^i_{\alpha K}\,\omega^K \qquad (I.17)$$

Геометрический смысл такой канонизации заключается в том,
векторы $\{\vec e_\alpha\}$ помещаются в характеристику $\chi_{n-m-1}(A)$ гиперпл
кости $H(A)$ [6]. Выбранный таким образом репер назовем ре
ром I-го порядка $\mathcal{R}^1$.

Дифференциальные уравнения $\mathcal{H}$-распределения относите
но репера $\mathcal{R}^1$ принимают следующий вид [6]:

$$\begin{cases} \omega^n_i = \Lambda^n_{iK}\,\omega^K, & \omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iK}\,\omega^K, \\ \omega^n_\alpha = H^n_{\alpha\hat\beta}\,\omega^{\hat\beta}, & \omega^i_\alpha = H^i_{\alpha K}\,\omega^K, \end{cases} \qquad (I.18)$$

е функции $\{\Lambda^n_{iK}\},\{\Lambda^\alpha_{iK}\},\{H^n_{\alpha\hat\beta}\},\{H^i_{\alpha K}\}$ удовлетворяют соответствен-
уравнениям (I.13) – (I.15) и уравнениям

$$\begin{cases} \nabla H^i_{\alpha j} = H^i_{\alpha jK}\,\omega^K, \quad \nabla H^i_{\alpha\beta} + H^n_{\alpha\beta}\,\omega^i_n = H^i_{\alpha\beta K}\,\omega^K, \\ \nabla H^i_{\alpha n} - H^i_{\alpha j}\,\omega^j_n - H^i_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_n + H^n_{\alpha n}\,\omega^i_n = H^i_{\alpha nK}\,\omega^K, \end{cases} \qquad (I.19)$$

также соотношениям

$$H^n_{\alpha n}\,\Lambda^n_{[jK]} + H^n_{\alpha\beta}\,\Lambda^\beta_{[jK]} + \Lambda^n_{i[j}\,H^i_{|\alpha|K]} = 0. \qquad (I.20)$$

еометрические объекты $\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{iK},\Lambda^\alpha_{iK},H^n_{\alpha\hat\beta}\}$ и $\Gamma_2 = \{\Gamma_1, H^i_{\alpha K}\}$ яв-
ются фундаментальными объектами соответственно I-го и 2-го
рядка регулярного $\mathcal{H}$-распределения [6], заданного отно-
ительно репера $\mathcal{R}^1$.

§ 2. Многообразие фокальных точек конуса асимптотических направлений $\mathcal{H}$-распределения аффинного пространства A_n

I. Конус асимптотических направлений K, ассоциирован-
ый с текущим элементом $\mathcal{H}$-распределения, задается системой
равнений [5], [6,(6.2)]:

$$x^n = 0, \quad h^n_{ab}\,x^a x^b = 0, \quad h^n_{ab} = \tfrac{1}{2}(H^n_{ab} + H^n_{ba}). \qquad (2.1)$$

аспределение таких конусов K (2.I) обозначим $K(\mathcal{H})$. Фокаль-
ой точкой $\mathcal{F}$ текущего элемента распределения $K(\mathcal{H})$ (т.е. ко-
уса K (2.I)) с центром в точке A называется [5] точка
того элемента, которая принадлежит также (с точностью до ве-
ичин первого порядка малости) и соседнему элементу этого ра-
пределения $K(\mathcal{H})$, полученному смещением центра A в некото-
ом направлении (фокальное направление, соответствующее дан-
ой точке).

Координаты x^J и $\hat x^J$ произвольной точки X относительно
одвижных реперов, присоединенных к точкам $\vec A$ и $\vec A + d\vec A$,
вязаны (с точностью до величин первого порядка малости) со-
тношениями [3]:

$$\tilde x^J \cong x^J - x^K\,\omega^J_K. \qquad (2.2)$$

равнения, определяющие соседний элемент распределения $K(\mathcal{H})$
тносительно локального репера $\mathcal{R}^1(A)$, согласно (2.2) имеют
ид:

$$x^n - x^J\omega^n_J \cong 0, \quad (h^n_{ab} + dh^n_{ab})(x^a - \omega^a_J x^J)(x^b - \omega^b_J x^J) = 0. \qquad (2.3)$$

Заменив dh^n_{ab} в формулах (2.3) соответствующими выраже-
ниями из уравнений $\nabla h^n_{ab} = h^n_{abJ}\,\omega^J$, а также учитывая, что

координаты фокальной точки $\mathcal{F}$ конуса (2.I) удовлетворяют к уравнениям (2.I), так и уравнениям (2.3), приходим в резул тате к следующей системе

$$\begin{cases} x^n=0, \quad (-x^i\Lambda^n_{iJ}-x^\alpha H^n_{\alpha J})\omega^J=0, \\ h^n_{abJ}x^ax^b\omega^J=\theta\cdot h^n_{ab}x^ax^b, \end{cases} \qquad (2.4)$$

где $\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1$. Уравнения (2.4) определяют многообразие фока ных точек $\mathcal{F}(K)$ элемента распределения $K(\mathcal{H})$ (т.е. конус K (2.I)) при смещении центра A распределения в произвол ном направлении.

2. Допустим, что точка A смещается по кривым

$$\omega^a-\mathcal{M}^a_n\omega^n=0,\quad \omega^n=\mu^n\theta \quad (\mu^n\neq 0), \qquad (2.5)$$

принадлежащим распределению нормалей Михэйлеску I-го рода $\vec{\mathcal{M}}$ [6] данного $\mathcal{H}$-распределения. Поле нормалей $\vec{\mathcal{M}}$ определен в дифференциальной окрестности 2-го порядка полем квазитен ра $\{\mathcal{M}^a\}=\{\frac{1}{2}(L^a+\gamma^a)\}$ [6, § 8]. В силу (2.5) из системы (2. получаем

$$\begin{cases} x^n=0,\quad m_ax^a=0, & (a) \\ \omega^n(h^n_{abc}\mathcal{M}^c_n+h^n_{abn})x^ax^b=\theta\cdot h^n_{ab}x^ax^b, & (в) \end{cases} \qquad (2.6)$$

где согласно [6, (8.30)]: $m_a=-H^n_{ab}\mathcal{M}^b_n-H^n_{an}$.

Свертывая (2.6в) с тензором h^{ab}_n [6, (6.4)] по индексам a и b, находим

$$\theta=\frac{1}{n-1}(\mathcal{H}_c\mathcal{M}^c_n+\mathcal{H}_n)\omega^n,\quad \mathcal{H}_J\overset{def}{=}h^{ab}_n h^n_{baJ}. \qquad (2.7)$$

Окончательный вид системы (2.6), определяющей многообразие фокальных точек $\mathcal{F}(K)$ элемента (2.I) распределения $K(\mathcal{H})$, получим, подставляя выражение (2.7) в уравнение (2.6в). Ит в дифференциальной окрестности 2-го порядка имеем следующ систему:

$$\begin{cases} x^n=0,\quad m_ax^a=0, & (a) \\ g_{ab}x^ax^b=0, & (в) \end{cases} \qquad (2.8)$$

где

$$g_{ab}\overset{def}{=}h^n_{abc}\mathcal{M}^c_n+h^n_{abn}-\frac{1}{n-1}(\mathcal{H}_c\mathcal{M}^c_n+\mathcal{H}_n)h^n_{ab},\ \nabla g_{ab}=g_{abK}\omega^K. \qquad (2.9)$$

Совокупность функций $\{g_{ab}\}$ образует дважды ковариантный си метрический тензор 2-го порядка. Многообразие фокальных то $\mathcal{F}(K)$ (2.8) конуса K (2.I) представляет собой конус G_{n-2} (2.8в) с вершиной в центре A $\mathcal{H}$-распределения, лежащий (n-2)-мерной плоскости $m(A)$ (2.8а), где $A\in G_{n-2}(H)\subset m(A)\subset$

Базисная плоскость $\Lambda(A)$ и характеристика $\chi(A)$ высека из инвариантного конуса $G_{n-2}(H)$ еще два многообразия фо льных точек конуса асимптотических направлений (2.I):

а) многообразие $\mathcal{F}_\Lambda(\mathcal{K})$ – сечение конуса $G_{n-2}(H)$ базисной оскостью $\Lambda(A)$:

$$\begin{cases} x^n=0,\ x^\alpha=0,\ m_ix^i=0, & (a) \\ g_{ij}x^ix^j=0, & (в) \end{cases} \qquad (2.10)$$

торое представляет собой конус $g_{m-1}(\Lambda)$ (2.10в), лежащий в оскости $m_{m-1}(A)$ (2.10а), с центром в точке A, т.е. $\in g_{m-1}(\Lambda)\subset\mathcal{M}_{m-1}(A)$;

в) многообразие $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K})$ – сечение конуса $G_{n-2}(H)$ характе стикой $\chi(A)$ $\mathcal{H}$-распределения:

$$\begin{cases} x^n=0,\ x^i=0,\ m_\alpha x^\alpha=0, & (a) \\ g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0, & (в) \end{cases} \qquad (2.11)$$

торое представляет собой конус $g_{n-m-2}(\chi)$ (2.11в), лежащий плоскости $m_{n-m-2}(A)$ (2.11а), с центром в точке A, т.е. $\in g_{n-m-2}(\chi)\subset m_{n-m-2}(A)$. Отметим, что совокупности величин $g_{ij}\}$ и $\{g_{\alpha\beta}\}$ представляют собой симметрические тензоры го порядка.

Т е о р е м а 2. Распределение $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ конусов асимпто ических направлений K (2.I) оснащающего H-распределения рождает внутренним образом в дифференциальной окрестности го порядка распределения инвариантных конусов $G_{n-2}(H)$ (2.8), $g_{m-1}(\Lambda)$ (2.10), $g_{n-m-2}(\chi)$ (2.11), ассоциированных с распре лением нормалей Михэйлеску $\vec{\mathcal{M}}$ I-го рода $\mathcal{H}$-распределения. нусы (2.8), (2.10), (2.11) являются многообразиями $\mathcal{F}(\mathcal{K})$, $(\mathcal{K}),\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K})$ фокальных точек конуса K (2.I), принадлежащими оответственно к H-распределению, Λ-распределению и χ-аспределению данного $\mathcal{H}$-распределения.

3. Пусть центр A смещается по кривым

$$\omega^a-\Phi^a_n\omega^n=0,\quad \omega^n=\rho^n\theta \quad (\rho^n\neq 0), \qquad (2.12)$$

ринадлежащим распределению нормалей Фубини I-го рода $\vec{\Phi}$ [6, 8] $\mathcal{H}$-распределения, которое задано полем квазитензора Φ^a_n [6, § 8] в дифференциальной окрестности 3-го порядка. налогично, как это показано в п.2, § 2, находим многообразие окальных точек $\Phi(\mathcal{K})$ конуса K (2.I) при смещении центра A по кривым (2.12). Многообразие $\Phi(\mathcal{K})$ задается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x^n = 0, \quad \varphi_a x^a = 0, & (а) \\ \varphi_{ab} x^a x^b = 0, & (в) \end{cases} \tag{2.13}$$

где

$$\begin{cases} \varphi_{ab} \overset{def}{=} h^n_{abc}\Phi^c_n + h^n_{abn} - \frac{1}{n-1}(\mathcal{H}_c \Phi^c_n + \mathcal{H}_n) h^n_{ab}, \ \nabla\varphi_{ab} = \varphi_{abK}\omega^K, \\ \varphi_a = -H^n_{ab}\Phi^b_n - H^n_{an}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Из (2.13) следует, что многообразие $\mathcal{F}(\mathcal{K})$ есть конус Φ_{n-2}(с вершиной в центре A, который принадлежит $(n-2)$-мерной скости $\varphi_{n-2}(A)$ (2.13а), т.е. $A \in \Phi_{n-2}(H) \subset \varphi_{n-2}(A) \subset H(A)$. Ана гично (см. п.2, § 2) получаем еще два многообразия фокальн точек конуса K (2.1):

а) многообразие $\mathcal{F}_\Lambda(\mathcal{K}) = \mathcal{F}(\mathcal{K}) \cap \Lambda(A)$:

$$x^n = 0, \ x^\alpha = 0, \ \varphi_i x^i = 0, \ \varphi_{ij} x^i x^j = 0; \tag{2.15}$$

в) многообразие $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K}) = \mathcal{F}(\mathcal{K})(A) \cap \chi(A)$:

$$\begin{cases} x^n = 0, \quad x^i = 0, \quad \varphi_\alpha x^\alpha = 0, & (а) \\ \varphi_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0. & (в) \end{cases} \tag{2.16}$$

Т е о р е м а 3. Распределение $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ конусов асимпто ческих направлений K (2.1) оснащающего H-распределения рождает внутренним образом в дифференциальной окрестности порядка распределения инвариантных конусов $\Phi_{n-2}(H)$ (2.13), $\varphi_{m-1}(\Lambda)$ (2.15), $\varphi_{n-m-2}(\chi)$ (2.16), ассоциированных с распре лением нормалей Фубини I-го рода $\vec{\Phi}$ $\mathcal{H}$-распределения. Ко сы (2.13), (2.15), (2.16) представляют собой многообразия $\mathcal{F}(\mathcal{K})$, $\mathcal{F}_\Lambda(\mathcal{K})$, $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K})$ фокальных точек конуса K (2.1), прина лежащие соответственно H-распределению, Λ-распределени χ-распределению данного $\mathcal{H}$-распределения.

§ 3. Нормали Нордена-Чакмазяна $\mathcal{H}$-распределения, ассоциированные с дифференциальной окрестностью 2-го порядка

Последовательно введем в рассмотрение в окрестности 2 порядка тензоры

$$H^{abc}_{nd} = h^{ab}_n \delta^c_d + h^{cb}_n \delta^a_d + h^{ac}_n \delta^b_d, \tag{3.1}$$

$$G_{fd} = (H^{abi}_{nf}\Lambda^n_{id} + H^{ab\alpha}_{nf} H^n_{\alpha d} + H^{abi}_{nd}\Lambda^n_{if} + H^{ab\alpha}_{nd} H^n_{\alpha f}) g_{ab}, \tag{3.2}$$

$$\nabla H^{abc}_{nd} = H^{abc}_{ndK}\omega^K, \quad \nabla G_{fd} = G_{fdK}\omega^K$$

квазитензоры

$$\begin{cases} H^a_n = \frac{1}{4} h^{ab}_n (H^{cd}_n H^n_{dcb} + H^n_{bn}), \\ G^a_n = (h^{bc}_{nf} - \Lambda^n_{in} H^{bci}_{nf} - H^n_{\alpha n} H^{bc\alpha}_{nf}) g_{bc} G^{fa}, \end{cases} \tag{3.3}$$

е

$$G^{fb} G_{bd} = \delta^f_d, \quad G_{bd} G^{da} = \delta^a_b,$$

функции h^{bc}_{nK} вводятся уравнениями [6, (6.5)]:

$$\nabla h^{bc}_n = h^{bc}_{nK}\omega^K. \tag{3.4}$$

общем случае поля квазитензоров $\{\mathcal{M}^a_n\}$, $\{G^a_n\}$, $\{H^a_n\}$ соответ венно определяют в дифференциальной окрестности 2-го поряд поля нормалей I-го рода $\vec{\mathcal{M}}, \vec{G}, \vec{H}$ в смысле Нордена-Чакма на для регулярного $\mathcal{H}$-распределения. Следовательно, в общем учае имеем три различных пучка нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-расп деления, порождаемые нормалями $\vec{\mathcal{M}}, \vec{G}, \vec{H}$:

а) пучок $(H, \mathcal{M})$:

$$H^a_n(\sigma) \overset{def}{=} \mathcal{M}^a_n + \sigma \hat{H}^a_n, \tag{3.5}$$

в) пучок $(G, \mathcal{M})$:

$$G^a_n(\rho) \overset{def}{=} \mathcal{M}^a_n + \rho \hat{G}^a_n, \tag{3.6}$$

с) пучок (H, G):

$$\hat{H}^a_n(\tau) \overset{def}{=} H^a_n + \tau \hat{\mathcal{G}}^a_n, \tag{3.7}$$

е σ, ρ, τ – абсолютные инварианты, а

$$\hat{H}^a_n = H^a_n - \mathcal{M}^a_n, \quad \hat{G}^a_n = G^a_n - \mathcal{M}^a_n, \quad \hat{\mathcal{G}}^a_n = G^a_n - H^a_n$$

– нзоры 2-го порядка. Однако можно показать, что если $\mathcal{H}$-аспределение голономно [6], то $\mathcal{M}^a_n \equiv H^a_n$ и, следовательно, в том случае остается только один пучок $(G, \mathcal{M})$ (3.6).

Каждой нормали $\vec{\nu}$ из пучков $(H,\mathcal{M})$, $(G,\mathcal{M})$, (H,G) в проективи ете Бомпьяни-Пантази [6]:

$$\nu_a = -H^n_{ab}\nu^b_n - H^n_{an} \Leftrightarrow \nu^b_n = -H^{ba}_n H^n_{an} - \nu_a H^{ba}_n \tag{3.8}$$

удет соответствовать $(n-1)$-мерная плоскость ν_{n-1} – нормаль -го рода $\mathcal{H}$-распределения. Нормалям I-го рода $\{\mathcal{M}^a_n\}$, $\{G^a_n\}$, $\{H^a_n\}$ соответствуют нормали 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения, опре еленные квазитензорами $\{m_a\}$, $\{g_a\}$, $\{h_a\}$, где

$$m_a = -H^n_{ab}\mathcal{M}^b_n - H^n_{an}, \ g_a = -H^n_{ab}G^b_n - H^n_{an}, \ h_a = -H^n_{ab}H^b_n - H^n_{an}. \tag{3.9}$$

аким образом, в каждой H-плоскости $H(A)$ в окрестности 2-го орядка получаем в общем случае три пучка нормалей 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения:

Зак. 1296

системой уравнений:

$$\begin{cases} x^n = 0, \quad \varphi_a x^a = 0, & (а) \\ \varphi_{ab} x^a x^b = 0, & (в) \end{cases} \tag{2.13}$$

где

$$\begin{cases} \varphi_{ab} \overset{def}{=} h^n_{abc} \Phi^c_n + h^n_{abn} - \frac{1}{n-1} (\mathcal{H}_c \Phi^c_n + \mathcal{H}_n) h^n_{ab}, \ \nabla \varphi_{ab} = \varphi_{abK} \omega^K, \\ \varphi_a = -H^n_{ab} \Phi^b_n - H^n_{an}. \end{cases} \tag{2.14}$$

Из (2.13) следует, что многообразие $\Phi(\mathcal{K})$ есть конус Φ_{n-2}(с вершиной в центре A, который принадлежит $(n-2)$-мерной скости $\varphi_{n-2}(A)$ (2.13а), т.е. $A \in \Phi_{n-2}(H) \subset \varphi_{n-2}(A) \subset H(A)$. Ана гично (см. п.2, § 2) получаем еще два многообразия фокальн точек конуса K (2.1):

а) многообразие $\Phi_\Lambda(\mathcal{K}) = \Phi(\mathcal{K}) \cap \Lambda(A)$:

$$x^n = 0, \ x^\alpha = 0, \ \varphi_i x^i = 0, \ \varphi_{ij} x^i x^j = 0; \tag{2.15}$$

в) многообразие $\Phi_\chi(\mathcal{K}) = \Phi(\mathcal{K})(A) \cap \chi(A)$:

$$\begin{cases} x^n = 0, \quad x^i = 0, \quad \varphi_\alpha x^\alpha = 0, & (а) \\ \varphi_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0. & (в) \end{cases} \tag{2.16}$$

Т е о р е м а 3. Распределение $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ конусов асимпто ческих направлений K (2.1) оснащающего H-распределения рождает внутренним образом в дифференциальной окрестности порядка распределения инвариантных конусов $\Phi_{n-2}(H)$ (2.13), $\varphi_{m-1}(\Lambda)$ (2.15), $\varphi_{n-m-2}(\chi)$ (2.16), ассоциированных с распре лением нормалей Фубини I-го рода $\vec{\Phi}$ $\mathcal{H}$-распределения. Ко сы (2.13), (2.15), (2.16) представляют собой многообразия $\Phi(\mathcal{K})$, $\Phi_\Lambda(\mathcal{K})$, $\Phi_\chi(\mathcal{K})$ фокальных точек конуса K (2.1), прина лежащие соответственно H-распределению, Λ-распределени χ-распределению данного $\mathcal{H}$-распределения.

§ 3. Нормали Нордена-Чакмазяна $\mathcal{H}$-распределения, ассоциированные с дифференциальной окрестностью 2-го порядка

Последовательно введем в рассмотрение в окрестности 2 порядка тензоры

$$H^{abc}_{nd} = h^{ab}_n \delta^c_d + h^{cb}_n \delta^a_d + h^{ac}_n \delta^b_d, \tag{3.1}$$

$$G_{fd} = (H^{abi}_{nf} \Lambda^n_{id} + H^{ab\alpha}_{\cdot nf} H^n_{\alpha d} + H^{abi}_{nd} \Lambda^n_{if} + H^{ab\alpha}_{nd} H^n_{\alpha f}) g_{ab}, \tag{3.2}$$

$$\nabla H^{abc}_{nd} = H^{abc}_{ndK} \omega^K, \quad \nabla G_{fd} = G_{fdK} \omega^K$$

квазитензоры

$$\begin{cases} H^a_n = \frac{1}{4} h^{ab}_n (H^{cd}_n H^n_{dcb} + H^n_{bn}), \\ G^a_n = (h^{bc}_{nf} - \Lambda^n_{in} H^{bci}_{nf} - H^n_{\alpha n} H^{bc\alpha}_{nf}) g_{bc} G^{fa}, \end{cases} \tag{3.3}$$

е

$$G^{fb} G_{bd} = \delta^f_d, \quad G_{bd} G^{da} = \delta^a_b,$$

функции h^{bc}_{nK} вводятся уравнениями [6, (6.5)]:

$$\nabla h^{bc}_n = h^{bc}_{nK} \omega^K. \tag{3.4}$$

общем случае поля квазитензоров $\{\mathcal{M}^a_n\}$, $\{G^a_n\}$, $\{H^a_n\}$ соответ- венно определяют в дифференциальной окрестности 2-го поряд- поля нормалей I-го рода $\vec{\mathcal{M}}, \vec{G}, \vec{H}$ в смысле Нордена-Чакма- ина для регулярного $\mathcal{H}$-распределения. Следовательно, в общем учае имеем три различных пучка нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-расп- деления, порождаемые нормалями $\vec{\mathcal{M}}, \vec{G}, \vec{H}$:

а) пучок $(H, \mathcal{M})$:

$$H^a_n(\sigma) \overset{def}{=} \mathcal{M}^a_n + \sigma \hat{H}^a_n, \tag{3.5}$$

в) пучок $(G, \mathcal{M})$:

$$G^a_n(\rho) \overset{def}{=} \mathcal{M}^a_n + \rho \hat{G}^a_n, \tag{3.6}$$

с) пучок (H, G):

$$\hat{H}^a_n(\tau) \overset{def}{=} H^a_n + \tau \hat{\mathcal{G}}^a_n, \tag{3.7}$$

де σ, ρ, τ – абсолютные инварианты, а

$\hat{H}^a_n = H^a_n - \mathcal{M}^a_n$, $\hat{G}^a_n = G^a_n - \mathcal{M}^a_n$, $\hat{\mathcal{G}}^a_n = G^a_n - H^a_n$ – нзоры 2-го порядка. Однако можно показать, что если $\mathcal{H}$- аспределение голономно [6], то $\mathcal{M}^a_n \equiv H^a_n$ и, следовательно, в том случае остается только один пучок $(G, \mathcal{M})$ (3.6).

Каждой нормали $\vec{\nu}$ из пучков $(H, \mathcal{M})$, $(G, \mathcal{M})$, (H, G) в проективи- ете Бомпьяни-Пантази [6]:

$$\nu_a = -H^n_{ab} \nu^b_n - H^n_{an} \iff \nu^b_n = -H^{ba}_n H^n_{an} - \nu_a H^{ba}_n \tag{3.8}$$

удет соответствовать $(n-1)$-мерная плоскость ν_{n-1} – нормаль -го рода $\mathcal{H}$-распределения. Нормалям I-го рода $\{\mathcal{M}^a_n\}$, $\{G^a_n\}$, $\{H^a_n\}$ соответствуют нормали 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения, опре- еленные квазитензорами $\{m_a\}$, $\{g_a\}$, $\{h_a\}$, где

$$m_a = -H^n_{ab} \mathcal{M}^b_n - H^n_{an}, \ g_a = -H^n_{ab} G^b_n - H^n_{an}, \ h_a = -H^n_{ab} H^b_n - H^n_{an}. \tag{3.9}$$

аким образом, в каждой H-плоскости $H(A)$ в окрестности 2-го орядка получаем в общем случае три пучка нормалей 2-го рода $\mathcal{H}$-распределения:

Зак. 1296

а) пучок (h, m):

$$\hat{h}_a(\sigma) = m_a + \sigma(h_a - m_a), \qquad (3.10)$$

в) пучок (g, m):

$$\hat{g}_a(\rho) = m_a + \rho(g_a - m_a), \qquad (3.11)$$

с) пучок (h, g):

$$\hat{h}^a_n(\tau) = h_a + \tau(g_a - h_a). \qquad (3.12)$$

В случае голономного $\mathcal{H}$-распределения имеем только один [пу]чок нормалей 2-го рода (g, m) (3.10).

Т е о р е м а 4. В дифференциальной окрестности 2-го порядка с нормалью $\vec{\mathcal{M}}$ I-го рода Михэйлеску ассоциируются [в] общем случае три пучка нормалей Нордена-Чакмазяна I-го ро[да] $(H,G), (G,\mathcal{M}), (H,\mathcal{M})$ $\mathcal{H}$-распределения и соответствующие и[м] в проективитете Бомпьяни-Пантази (3.8) три пучка нормалей Нордена-Чакмазяна 2-го рода $(h,g), (g,m), (h,m)$. В случае го[лономного] $\mathcal{H}$-распределения имеем только пучки $(G,\mathcal{M})$ и $(g,$

З а м е ч а н и е. Аналогичные построения (§ 2, § 3) [в] дифференциальной окрестности 2-го порядка можно осуществи[ть] с помощью любой нормали I-го рода $\mathcal{H}$-распределения, отли[ч]ной от нормали $\vec{\mathcal{M}}$ [6].

§ 4. Нормали Нордена-Чакмазяна $\mathcal{H}$-распределения, ассоциированные с окрестностью третьего порядка

I. По аналогии с построениями § 3, используя тензор $\{\varphi_{ab}\}$ 3-го порядка, последовательно находим

$$F_{fd} = (H^{abi}_{nf}\Lambda^n_{id} + H^{ab\alpha}_{nf}H^n_{\alpha d} + H^{abi}_{nd}\Lambda^n_{if} + H^{ab\alpha}_{nd}H^n_{\alpha f})\varphi_{ab},$$

$$F^a_n = (h^{bc}_{nf} - \Lambda^n_{in}H^{bci}_{nf} - H^n_{\alpha n}H^{bc\alpha}_{nf})\varphi_{bc}F^{fa}, \quad \text{причем} \quad F^{fa}F_{ad} = \delta^f_d,$$

$$\nabla F_{fd} = F_{fdk}\omega^k, \quad \nabla F^a_n + \omega^a_n = F^a_{nk}\omega^k. \qquad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что функции $\{F^a_n\}$ образуют квазитензор 3-[го] порядка. Поле нормалей I-го рода $\vec{F}\{F^a_n\}$ $\mathcal{H}$-распределен[ия], определяемое дифференциальными уравнениями (4.1), внутрен[ним] образом присоединено в окрестности 3-го порядка.

2. Непосредственной проверкой убеждаемся, что совоку[п]ность функций $\{\mathfrak{m}_a\}$, где

$$\mathfrak{m}_a = -m_{ab}H^{bc}_n H^n_{cn} + m_{an}, \quad \nabla\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_{ak}\omega^k, \qquad (4.2)$$

[о]бразует тензор 3-го порядка. Поле тензора $\{\mathfrak{m}_a\}$, заданное [д]ифференциальными уравнениями (4.2), определяет поле нормалей [2]-го рода H-распределения. В проективитете Бомпьяни-Пантази [(]3.8) находим для объектов $\{F^a_n\}$ и $\{\mathfrak{m}_a\}$ соответствующие им объ[е]кты

$$f_a = -H^n_{ab}F^b_n - H^n_{an}, \quad \nabla f_a = f_{ak}\omega^k; \qquad (4.3)$$

$$\mathcal{M}^a_n = -H^{ab}_n H^n_{bn} - H^{ab}_n\mathfrak{m}_b, \quad \nabla\mathcal{M}^a_n = \mathcal{M}^a_{nk}\omega^k. \qquad (4.4)$$

[П]оля объектов $\{f_a\}, \{\mathcal{M}^a_n\}$, удовлетворяющие дифференциальным [у]равнениям (4.3) и (4.4), задают соответственно поля нормалей [2]-го и I-го рода H-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна [в] окрестности 3-го порядка. Таким образом, в окрестности 3-го [п]орядка внутренним образом присоединяются к $\mathcal{H}$-распределению [д]ве пары $\{\mathcal{M}, \mathfrak{m}\}$, (F, f) его нормалей I-го и 2-го рода в смы[с]ле Нордена-Чакмазяна, соответствующих друг другу в проективи[т]ете Бомпьяни-Пантази (3.8).

3. Следуя работе Н.М.Остиану [5], введем в рассмотрение [е]ще одно поле нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-распределения в окрестно[с]ти 3-го порядка.

Точка Кенигса K_n нормали $\vec{\mathcal{M}}$ I-го рода Михэйлеску в диф[ф]еренциальной окрестности 2-го порядка задается объектом [$\{$]$\mathcal{M}^a_n, K_n\}$, где

$$K_n = \mathcal{M}^a_{na} - \mathcal{M}^a_n\mathcal{M}^b_n H^n_{ab}, \quad \nabla K_n = K_{nJ}\omega^J. \qquad (4.5)$$

[Т]очка K_n вместе с нормалью Михэйлеску 2-го рода m, соот[в]етствующей нормали $\vec{\mathcal{M}}$ I-го рода Михэйлеску в проективитете [Б]омпьяни-Пантази (3.8), определяет гиперплоскость $\mathcal{G}(A) = [K_n, m]$:

$$\mathcal{G}_a x^a + \mathcal{G}_n x^n - 1 = 0, \qquad (4.6)$$

где

$$\mathcal{G}_a = m_a, \quad \nabla\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_{aJ}\omega^J; \qquad (4.7)$$

$$\mathcal{G}_n = K_n - m_a\mathcal{M}^a_n, \quad \nabla\mathcal{G}_n = m_a\omega^a_n + \mathcal{G}_{nJ}\omega^J. \qquad (4.8)$$

Таким образом, к $\mathcal{H}$-распределению в дифференциальной ок[р]естности 2-го порядка инвариантным образом присоединяется ра[с]пределение гиперплоскостных элементов 2-го рода $(\mathcal{G})$ (4.6), которое назовем $\mathcal{G}$-распределением.

З а м е ч а н и е. Точка Кенигса любой инвариантной нормали и любая внутренняя инвариантная нормаль 2-го рода H-распределения также порождают распределение 2-го рода, внутренним образом ассоциированное с данным $\mathcal{H}$-распределением.

Функции $\{\mathcal{G}_{aJ}\}$, введенные уравнениями (4.7), позволяют рассмотреть следующие объекты 3-го порядка.

а) Тензор $\{\mathcal{R}_{ab}\}$, где

$$\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{G}_{ab} - \mathcal{G}_n H^n_{ab}, \quad \nabla \mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_{abK}\,\omega^K. \qquad (4.9)$$

Тензор $\{\mathcal{R}_{ab}\}$ не симметричен по индексам a и b и в общем случае отличен от нуля. Поэтому для него можно ввести обратный тензор $\{\mathcal{R}^{ab}\}$:

$$\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{bc} = \delta^a_c, \quad \mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^{bc} = \delta^c_a, \quad \nabla\mathcal{R}^{ab} = \mathcal{R}^{ab}_K\,\omega^K. \qquad (4.10)$$

в) Объект $\{\mathcal{R}_{an}, \mathcal{R}_{ac}\}$, где

$$\mathcal{R}_{an} = \mathcal{G}_{an} - \mathcal{G}_n H^n_{an}, \quad \nabla\mathcal{R}_{an} = \mathcal{R}_{ac}\,\omega^c_n - \mathcal{R}_{anK}\,\omega^K. \qquad (4.11)$$

Теперь непосредственной проверкой убеждаемся, что система функций

$$\mathcal{R}^a_n \overset{def}{=} -\mathcal{R}^{ab}\mathcal{R}_{bn} \qquad (4.12)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\nabla\mathcal{R}^a_n + \omega^a_n = \mathcal{R}^a_{nK}\,\omega^K. \qquad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что объект $\{\mathcal{R}^a_n\}$ есть квазитензор 3-го порядка. Поле этого объекта, заданное дифференциальными уравнениями (4.13), определяет поле нормалей I-го рода $\mathcal{H}$-распределения, которое назовем $\mathcal{R}$-распределением. Каждой нормали $\vec{\mathcal{R}}$ (4.12) I-го рода в проективитете Бомпьяни-Пантази (3.8) можно сопоставить нормаль 2-го рода $\varrho\{\varrho_a\}$ $\mathcal{H}$-распределения, где

$$\varrho_a = -H_{ab}\mathcal{R}^b_n - H_{an}, \quad \nabla\varrho_a = \varrho_{aK}\,\omega^K. \qquad (4.14)$$

Нормали $\vec{\mathcal{R}}\{\mathcal{R}^a_n\}$ и $\varrho\{\varrho_a\}$ назовем соответственно нормалями Н.М.Остиану I-го и 2-го рода оснащающего Н-распределения данного $\mathcal{H}$-распределения аффинного пространства A_n.

Выясним геометрический смысл нормали Н.М.Остиану I-го рода $\{\mathcal{R}^a_n\}$ $\mathcal{H}$-распределения. Найдем многообразие фокальных точек плоскости $\mathcal{G}(A)$ (4.6), соответствующее смещению центра A вдоль некоторой кривой

$$\omega^a = \mathcal{R}^a_n\,\omega^n, \quad \omega^n = \mu^n\theta \quad (\mu^n \neq 0), \qquad (4.15)$$

принадлежащей $\mathcal{R}$-распределению. Искомое многообразие имеет вид

$$\mathcal{G}_K\,\omega^K = 1, \quad (\mathcal{R}_{ab}\mathcal{R}^b_n + \mathcal{R}_{an})x^a + (\mathcal{R}_{nb}\mathcal{R}^b_n + \mathcal{R}_{nn})x^n = 0.$$

В силу (4.12) эту систему представим в виде

$$\begin{cases} G_a x^a + G_n x^n - 1 = 0, & \text{(а)} \\ (\mathcal{R}_{nb}\mathcal{R}^b_n + \mathcal{R}_{nn})x^n = 0. & \text{(в)} \end{cases} \qquad (4.16)$$

Здесь величина (4.16в)

$$\mathcal{R} \overset{def}{=} \mathcal{R}_{nb}\mathcal{R}^b_n + \mathcal{R}_{nn}$$

удовлетворяет уравнению

$$d\mathcal{R} - 2\mathcal{R} = \mathcal{R}_K\,\omega^K \qquad (4.17)$$

Величина $\mathcal{R}$ есть относительный инвариант (4.17) в общем случае отличный от нуля. Следовательно, система (4.16) окончательно принимает вид (учитываем, что $\mathcal{G}_a = m_a$):

$$x^n = 0, \quad m_a x^a - 1 = 0. \qquad (4.18)$$

Система (4.18) задает нормаль 2-го рода Михэйлеску Н-распределения. Таким образом, нормаль Н.М.Остиану I-го рода $\vec{\mathcal{R}}(A)$ характеризуется тем, что при смещении центра A $\mathcal{H}$-распределения вдоль кривой (4.15), касающейся этой нормали, бесконечно близкие плоскости $\mathcal{G}$-распределения пересекаются по нормали Михэйлеску $\{\mathcal{R}^a_n\}$ 2-го рода Н-распределения. Геометрический смысл нормалей $\{\mathcal{R}^a_n\}$ для гиперплоскостных элементов проективного пространства P_n был найден Н.М.Остиану в работе [5].

Можно показать, что квазитензоры $\{\mathfrak{M}^a_n\}, \{F^a_n\}, \{\mathcal{R}^a_n\}$ линейно независимы, так же, как и соответствующие им в проективитете Бомпьяни-Пантази (3.8) тензоры $\{m_a\}, \{\ell_a\}, \{\varrho_a\}$.

Т е о р е м а 5. В дифференциальной окрестности 3-го порядка с $\mathcal{H}$-распределением внутренним инвариантным образом ассоциируются три пучка его нормалей I-го рода $\{\mathfrak{M}, F\}, \{\mathfrak{M}, \mathcal{R}\}, \{F, \mathcal{R}\}$ и соответствующие им в проективитете Бомпьяни-Пантази (3.8) три пучка нормалей 2-го рода $\{m, \ell\}, \{m, \varrho\}, \{\ell, \varrho\}$ в смысле Нордена-Чакмазяна.

Библиографический список

1. Б л я ш к е В. Дифференциальная геометрия. I. М.;Л. ОНТИ, 1935.

2. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1950. Вып.8. С.197-272.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

4. О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. П // Тр. гео-

метр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.95-114.

5. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семин ра / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

6. П о п о в Ю.И. Поля геометрических объектов гипер лосного распределения аффинного пространства / Калинингр. -т. Калининград, 1987. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87. № 6807-В87.

7. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная г метрия гиперполосного распределения m-мерных линейных эл ментов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.11 151.

8. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репер погруженного многообразия / Rev. math. pures et appl (RPR). 1962. V.7. № 2. P.231-240.

УДК 514.75

ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, У КОТОРЫХ РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ФОКАЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЯМЫХ ПАРЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЯМЫХ ПАРЫ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

О.С.Р е д о з у б о в а

(Московский государственный педагогический университет)

В евклидовом трехмерном пространстве рассмотрены таки пары Т конгруэнций, у которых равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары и фокальные расстоя соответствующих прямых пары дополнительных конгруэнций. Из чены свойства таких пар в общем случае. Пары обозначены бу вой T_p.

Поместим вершину O подвижного ортонормированного репе $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ на прямой конгруэнции $\{r\}$ общих перпен куляров, вектор $\vec{e}_3$ параллелен r. Компоненты инфинитезима льного перемещения репера ω^i, ω_i^j $(i,j = 1,2,3)$ удовлетворяют условиям

$$d\vec{O} = \vec{e}_i \omega^i, \quad d\vec{e}_i = \vec{e}_j \omega_i^j, \quad \omega_j^i = -\omega_i^j, \quad \omega_i^i = 0.$$

Прямые конгруэнции $\{r\}$ общих перпендикуляров пересека

оответствующие прямые r_a $(a = 1,2)$ в точках K_a. Направля ие векторы прямых r_a есть векторы $\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a$; α_a – углы, образуемые прямыми r_a с вектором $\vec{e}_1$. Относи ельно реперов $(K_a, \vec{\eta}_a)$ фокусы F_a, F_a' прямых r_a есть числа ρ_a, ρ_a', h_a – абсциссы точек K_a в репере $(O, \vec{e}_3)$. Условия, пределяющие пары Т конгруэнций в общем случае, можно записать виде системы уравнений (3) в [1, с.3].

Т е о р е м а 1. Пары Т конгруэнций являются парами T_p огда и только тогда, когда это есть равнонаклонные пары 2-го ипа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем условия, определяю ие пары T_p конгруэнций в общем случае $(\rho_1'\rho_2 \neq \rho_1\rho_2')$. К уравнениям, определяющим пары Т конгруэнций, надо присоединить словия, полученные из равенств $F_1F_1' = F_2F_2'$ и $F_1F_2 = F_1'F_2'$:

$$|\rho_1 - \rho_1'| = |\rho_2 - \rho_2'|, \quad \sqrt{(\rho_1)^2 + (\rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (h_1 - h_2)^2} =$$
$$= \sqrt{(\rho_1')^2 + (\rho_2')^2 - 2\rho_1'\rho_2'\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + (h_1 - h_2)^2}.$$

осле некоторых преобразований из полученных равенств имеем:

$$\rho_2' = \rho_2 - \rho_1 + \rho_1', \quad (\rho - \rho_1')(\rho_1' + \rho_2) = 0.$$

тсюда следует, что $\rho_1' = -\rho_2$, $\rho_2' = -\rho_1$. Как следует из [1, с.14] акие пары есть равнонаклонные пары Т 2-го типа.

Верно и обратное. В соответствии с теоремами 12 и 13 из 1, с.15] пары Т конгруэнций 2-го типа обладают тем свойством, то у них равны между собой фокальные расстояния соответствуищих прямых. Таким же свойством обладают и фокальные расстояния соответствующих прямых пары дополнительных конгруэнций $\{F_1, F_2\}$ и $\{F_1', F_2'\}$. Теорема доказана.

З а м е т и м, что в общем случае пары T_p конгруэнций пределяются системой уравнений (23) [1, с.14] $(\rho_1'\rho_2 \neq \rho_1\rho_2')$ обозначениях (1) из [1, с.3]:

$$\begin{cases} \rho_1' = -\rho_2, \quad \rho_2' = -\rho_1, \quad H_a = A_a, \\ Q_1 = H(\rho_1 - \rho_2) - \Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2}, \quad Q_2 = -H_2(\rho_1 - \rho_2) - \Omega_{23}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1 - h_2}. \end{cases} \tag{1}$$

Известно, что такие пары существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Пары T_p конгруэнций имеют постоянный угол между соответствующими прямыми тогда и только тогда,