ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

Л.Г.Корсакова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В P_3

В работе [1] рассматривался подкласс расслояемых пар (C_1, C_2) конгруэнций коник - так называемая пара B. В данной заметке доказывается, что можно ослабить условия, выделяющие пары B.

Рассмотрим в пространстве P_3 расслояемую пару (C_1, C_2) [1] конгруэнций коник C_1, C_2, не лежащих в одной плоскости и не касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей, описывающих двумерные многообразия. Отнесем пару (C_1, C_2) к подвижному реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$, где вершины A_i ($i, j, \kappa = 1,2$; $i \neq j$) помещаются в точки пересечения коники C_j с прямой ℓ, A_3 и A_4 — полюсы прямой ℓ относительно коник C_1 и C_2. Уравнения коник C_1 и C_2 относительно репера R и система дифференциальных уравнений пары (C_1, C_2) имеют соответственно вид:

$$(x^3)^2 - (a_1 x^1)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{1}$$

$$(x^4)^2 - (a_2 x^2)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \\ da_i = a_i(\omega_i^i - \omega_{i+2}^{i+2}) = A_i^k\omega_k, \quad \Omega_i = b_i^k\omega_k \end{gathered} \tag{3}$$

(по i, j не суммировать!).

где ω_α^β -компоненты инфинитезимальных перемещений репера R и $\omega_i \overset{def}{=} \omega_i^4$, $\Omega_i \overset{def}{=} \omega_i^i + \omega_j^j - 2\omega_{i+2}^{i+2}$.

Анализируя систему квадратичных уравнений, определяющих расслояемую пару (C_1, C_2) [1, с.211-212], мы приходим к уравнениям

$$a_1 m = 0, \quad a_2 m = 0, \tag{4}$$

где $m^2 = \Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22} - \Gamma_3^{21}\Gamma_3^{12}$,

откуда следует, что многообразие расслояемых пар (C_1, C_2) разбивается на два типа: многообразия, для которых $m \neq 0$, и многообразия, для которых $m = 0$. Если $m \neq 0$, то из уравнений (4) получим, что $a_1 = a_2 = 0$, т.е. в этом случае коники пересекаются в точках A_i. Расслояемые пары конгруэнций коник такого типа назовем парами M_0.

Случай, когда $m = 0$, т.е. когда коники не имеют пару общих точек, полностью рассмотрен в [2].

Как известно [1, с.212], расслояемая пара (C_1, C_2) называется парой B, если : 1) точки A_3 и A_4 являются характеристическими точками плоскостей коник C_1 и C_2 : 2) касательные плоскости к поверхностям (A_i) инцидентны прямой A_3A_4.

Т е о р е м а. Если полюсы A_3 и A_4 прямой A_1A_2 относительно коник C_1 и C_2 описывают поверхности, касающиеся плоскостей соответствующих коник, то пара M_0 является парой B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что

$$\omega_3^4 = \omega_4^3 = 0,$$

причем выполняются следующие квадратичные уравнения:

$$\begin{gathered} \omega_3^i \wedge \omega_j^i = 0, \quad \omega_4^i \wedge \omega_j^i = 0, \\ \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2 = 0, \quad \omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \\ \Omega_1 \wedge \omega_3^1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_3^2 - \omega_4^1 \wedge \omega_4^2 = 0, \\ \Omega_1 \wedge \omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega_i^3 \wedge \omega_3^j + \omega_i \wedge \omega_4^j = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\Omega_2 \wedge \omega_4^1 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad \Omega_2 \wedge \omega_4^2 + \omega_4^1 \wedge \omega_1^2 = 0,$$

$$2\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 + \omega_1 \wedge \omega_4^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 - \omega_2 \wedge \omega_4^2 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^2 = 0.$$

Поскольку для пар M_0 выполняется условие

$$m \neq 0,$$

то формы ω_3^1 и ω_3^2 можно принять в качестве базисных линейно независимых. Обозначим

$$\omega_3^1 = \vartheta_1, \quad \omega_3^2 = \vartheta_2.$$

Считая, что

$$\omega_1^2 \omega_2^1 \neq 0, \tag{6}$$

осуществим переход к новому базису ϑ_i:

$$\omega_i^j = \lambda_j \vartheta_j, \quad \omega_4^1 = \gamma \vartheta_1, \quad \gamma \omega_4^2 = \vartheta_2, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0,$$

$$\omega_1 = -k\gamma\omega_4^1 + b\vartheta_2, \quad \omega_2 = b\vartheta_1 + c\vartheta_2, \quad \omega_1^3 = k\omega_4^1 + l\omega_4^2, \tag{7}$$

$$\omega_2^3 = l\omega_4^1 - c\gamma\vartheta_2, \quad \Omega_1 = -(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2), \quad \gamma^2\Omega_2 = -(\lambda_2\gamma^3\omega_4^1 + \lambda_1\vartheta_2),$$

причем

$$2\gamma - (b + l)(1 + \gamma^2) = 0. \tag{8}$$

Частичное продолжение системы (7) дает следующее уравнение Пфаффа:

$$d\gamma = \frac{3}{2}(1 - \gamma^2)(\lambda_2\omega_4^1 + \lambda_1\omega_4^2). \tag{9}$$

Замыкая и продолжая уравнения

$$\omega_1^2 = \lambda_2\vartheta_2, \quad \omega_2^1 = \lambda_1\vartheta_1,$$

имеем:

$$d\lambda_1 = L\vartheta_1 - \lambda_1(\omega_3^3 - \omega_2^2) - (\lambda_1)^2\vartheta_2, \tag{10}$$

$$d\lambda_2 = F\vartheta_2 - \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (\lambda_2)^2\vartheta_1. \tag{11}$$

Замыкая уравнение (9) и уравнения

$$\Omega_1 = -(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2), \quad \gamma^2\Omega_2 = -(\lambda_2\gamma^3\omega_4^1 + \lambda_1\vartheta_2),$$

получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &L - F\gamma^2 - 2\lambda_1\lambda_2(1 - \gamma^2) = 0, \\ &\gamma(L - F) + (1 - \gamma^2)(b - 3l) = 0, \\ &L - F\gamma^4 + (1 - \gamma^2)[\gamma(3b - l) - 2\lambda_1\lambda_2(1 + \gamma^2)] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Из анализа системы (12) следует, что возможны два и только два случая:

$$\text{I}. \quad 1 - \gamma^2 = 0,$$

$$\text{II}. \quad 1 - \gamma^2 \neq 0.$$

Разберем в отдельности оба случая.

I. $\gamma = \varepsilon, \ \varepsilon^2 = 1.$

Продолженная система (7),(8) примет вид:

$$\begin{aligned} &\omega_i^j = \lambda_j\vartheta_j, \quad \omega_4^i = \varepsilon\vartheta_i, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \\ &\omega_1 = -k\vartheta_1 + b\vartheta_2, \quad \omega_2 = b\vartheta_1 + c\vartheta_2, \quad \omega_i^3 = \vartheta_j - \varepsilon\omega_i, \\ &\Omega_1 = -(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2), \quad \Omega_2 = \Omega_1, \\ &d\lambda_1 = L\vartheta_1 - \lambda_1(\omega_3^3 - \omega_2^2) - (\lambda_1)^2\vartheta_2, \\ &d\lambda_2 = L\vartheta_2 - \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (\lambda_2)^2\vartheta_1. \end{aligned} \tag{13}$$

$$dL = (1 - 4L)(\lambda_2\vartheta_1 + \lambda_1\vartheta_2). \tag{14}$$

Уравнение (14) - вполне интегрируемое. Замыкая, наконец, уравнения

$$\omega_i^3 = \vartheta_j - \varepsilon\omega_i,$$

мы приходим к условиям

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

которые противоречат (6).

Рассмотрим случай II.

II. $1-\gamma^2 \neq 0$.

Тогда из уравнений (12) и (8) имеем:

$$b = \ell, \quad \ell(1+\gamma^2) = \gamma, \tag{15}$$

$$d\lambda_1 = 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}\right)\vartheta_1 - \lambda_1(\omega_3^3 - \omega_2^2) - (\lambda_1)^2\vartheta_2, \tag{16}$$

$$d\lambda_2 = 2\left(\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{1+\gamma^2}\right)\vartheta_2 - \lambda_2(\omega_3^3 - \omega_1^1) - (\lambda_2)^2\vartheta_1. \tag{17}$$

Осуществляя последовательные замыкания системы (I6), (I7), получим соотношения

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0,$$

противоречащие (6).

Итак, не существует пар M_o, в которых точки A_3 и A_4 являются характеристическими точками плоскостей коник C_1 и C_2, а прямая A_3A_4 не инцидентна касательным плоскостям к поверхностям (A_i). Следовательно, если A_3 и A_4 - характеристические точки плоскостей коник C_1 и C_2, то пара M_o является парой B. Теорема доказана.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. Расслояемые пары конгруэнций фигур.- Тр.геометрич.семинара .М., ВИНИТИ, 3, I97I, с. I93-220.

2. К о р с а к о в а Л.Г. Расслояемые пары конгруэнций коник в P_3 -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, I976, с.46-53.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.IO 1979

УДК 513.73

М.В.К р е т о в

КОМПЛЕКСЫ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматриваются комплексы K_3 эллипсоидов. Найден основной геометрический объект [1] комплекса K_3. Показано, что центр эллипсоида $\tilde{Q}$ является его характеристической точкой [2]. Доказано существование инвариантной поверхности четвертого порядка, ассоциированной с комплексом K_3, которая содержит характеристическое многообразие эллипсоида. Рассмотрен специальный класс комплексов K_3.

§I. Основной геометрический объект комплекса K_3

Отнесем комплекс K_3 эллипсоидов к реперу $R = \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где A -центр эллипсоида $\tilde{Q}$. Деривационные формулы репера R запишутся в виде

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j \quad (i, j, k = 1,2,3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{1.2}$$

Уравнение эллипсоида $\tilde{Q}$ имеет вид

$$F \equiv a_{ij} x^i x^j - 1 = 0. \tag{1.3}$$

Пусть векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида, причем концы их лежат на эллипсоиде. Тогда уравнение эллипсоида $\tilde{Q}$ запишется в виде