Tangent fibering $T(V_r)$ and normal fibering $N(V_r)$ are introoduced, associated with normalized by Norden hiperstrip $CH_m^r \subset P_n$. It is proved that in there fiberings centroaffine connectuon ∇ and centroprojective connection $\nabla^{\perp}$ are induced respectively. It is shown, that if normals of the 1st -genus of generalized normalization of hyperstrip CH_m^r form the axial equipment, and normals of the 2nd-genus form harmonic pseudocongruence, than connection $\nabla^{\perp}$ is plane. It is cleared up, that a series of subfiberings, associated with hiperstrip CH_m^r are parallel subfibering of normal fibering $N(V_r)$.

УДК 514.75

СИММЕТРИЧНЫЕ ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ

О.С. Редозубова

(Московский педагогический государственный университет)

В данной работе объединены результаты, полученные в разные годы по теории симметричных пар Т конгруэнций.

В евклидовом трехмерном пространстве рассматриваются пары Т конгруэнций $\{r_a\}$ (a=1,2), связанные с конгруэнцией их общих перпендикуляров $\{r\}$. Прямая r пересекает соответствующие прямые пары Т конгруэнций в точках K_a. Вершина подвижного ортонормированного репера $R=(O,\vec{e}_i)$ (i,j=1,2,3) помещается на прямой r, вектор $\vec{e}_3 \| r$; α_a углы, образуемые прямыми r_a с вектором $\vec{e}_1$, ρ_a, ρ'_a - абсциссы фокусов конгруэнций $\{r_a\}$ относительно репера $(K_a,\vec{\eta}_a)$, где $\vec{\eta}_a = \vec{e}_1\cos\alpha_a + \vec{e}_2\sin\alpha_a$ - направляющие орты прямых r_a. Координаты точек K_a в репере $(O,\vec{e}_3)$ равны h_a. Компоненты инфинитезимальных перемещений репера R : ω^i, ω_i^j удовлетворяют условиям

$$d\vec{O} = \omega^i\vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j\vec{e}_j.$$

Условия, определяющие пары Т конгруэнций, можно записать в виде [1,с.139] :

$$\begin{aligned} &\rho_1 H_2 + \Omega_{23}\tfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2} - \rho_2 A_2 + Q_2 = 0, \quad \rho_1 A_1 - \Omega_{13}\tfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2} - \rho_2 H_1 - Q_1 = 0, \\ &\rho'_1 H_2 + \Omega_{23}\tfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2} - \rho'_2 A_2 + Q_2 = 0, \quad \rho'_1 A_1 - \Omega_{13}\tfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2} - \rho'_2 H_1 - Q_1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\Omega_a = \omega^1\cos\alpha_a + \omega^2\sin\alpha_a, \quad \Omega_a^* = \omega^1\sin\alpha_a - \omega^2\cos\alpha_a,$$

$$\Omega_{a3} = \omega_1^3\cos\alpha_a + \omega_2^3\sin\alpha_a, \quad \Omega_{a3}^* = -\omega_1^3\sin\alpha_a + \omega_2^3\cos\alpha_a,$$

$$A_a=\frac{\omega_1^2+d\alpha_a}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)},\quad H_a=\frac{\omega^3+dh_a}{h_1-h_2},\quad Q_a=\frac{\Omega_a^*+h_a\Omega_{a3}^*}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Обозначая через $\rho=\rho_1'\rho_2-\rho_1\rho_2'$, будем иметь два случая : общий $\rho\neq 0$ и специальный $\rho=0$. В общем случае систему уравнений (1) можно разрешить относительно A_a и H_a:

$$\begin{aligned}
&A_1=\Omega_{13}\frac{\rho_2\rho_2'(\rho_1'-\rho_1)}{\rho(h_1-h_2)}+Q_1\frac{\rho_2-\rho_2'}{\rho},\quad A_2=\Omega_{23}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2-\rho_2')}{\rho(h_1-h_2)}+Q_2\frac{\rho_1'-\rho_1}{\rho},\\
&H_1=\Omega_{13}\frac{\rho_1\rho_1'(\rho_2'-\rho_2)}{\rho(h_1-h_2)}+Q_1\frac{\rho_1-\rho_1'}{\rho},\quad H_2=\Omega_{23}\frac{\rho_2\rho_2'(\rho_1-\rho_1')}{\rho(h_1-h_2)}+Q_2\frac{\rho_2'-\rho_2}{\rho}.
\end{aligned}\tag{2}$$

Исследование системы уравнений (2) приводит к выводу о том, что если ранг матрицы системы билинейных уравнений, присоединенных к квадратичным, равен четырем, то пары Т конгруэнций существуют с произволом двух функций двух аргументов. При понижении ранга системы билинейных уравнений получим особое решение $Q_a=\lambda\Omega_{a3}$. В работе [2,с.410] доказано, что в этом случае конгруэнции $\{r_a\}$ вырождаются в линейчатые поверхности.

В специальном случае систему уравнений (1) можно привести к виду [3,с.126]:

$$\begin{aligned}
&Q_1=\Omega_{13}\frac{t\rho_1\rho_1'}{h_1-h_2},\quad Q_2=\Omega_{23}\frac{t\rho_1\rho_1'}{h_1-h_2},\quad A_1=H_1t+\Omega_{13}\frac{(\rho_1+\rho_1')t}{h_1-h_2},\\
&A_2=H_2\frac{1}{t}+\Omega_{23}\frac{(\rho_1+\rho_1')t}{h_1-h_2},\quad \rho_2=t\rho_1,\quad \rho_2'=t\rho_1'\quad (t\neq 0).
\end{aligned}\tag{3}$$

Исследование системы уравнений (3) приводит к выводу о том, что специальные пары Т конгруэнций существуют с произволом одной функции двух переменных. Геометрически специальные пары Т конгруэнций характеризуются тем, что общие перпендикуляры соответствующих прямых пары и пары дополнительных конгруэнций взаимно перпендикулярны.

Пара Т конгруэнций называется симметричной, если соответствующие прямые равнонаклонны к биссектральным плоскостям фокальных плоскостей конгруэнции общих перпендикуляров и пересекают прямые этих конгруэнций на равных расстояниях от центров.

В работе [1,с.143] доказано, что если задана конгруэнция, допускающая присоединенные симметричные пары Т конгруэнций в общем случае при условии, что заданная конгруэнция является для них конгруэнцией общих перпендикуляров, то такие пары есть симметричные расслояемые пары, причем к каждой конгруэнции общих перпендикуляров можно присоединить ∞^1 таких пар конгруэнций.

Таким образом, в общем случае симметричные пары Т конгруэнций всегда расслояемы.

Теорема 1. Пара Т конгруэнций в специальном случае всегда симметрична и не расслояема.

Доказательство. Поместим вершину подвижного трехгранника в центр прямой r конгруэнции общих перпендикуляров, а векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ направим параллельно биссектральным плоскостям фокальных плоскостей конгруэнции общих перпендикуляров (трехгранник Гишара). Тогда, в соответствии с [4,с.73] имеют место равенства :

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\operatorname{ctg}\varphi \cdot \omega_2^3, \quad \omega^2 = -\hat{\rho}\operatorname{tg}\varphi \cdot \omega_1^3, \tag{4}$$

где $2\hat{\rho}$ и 2φ есть, соответственно, расстояние между фокусами и угол между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров. Подставляя (4) в первые два уравнения системы (3), получим, учитывая линейную независимость форм ω_1^3, ω_2^3, систему уравнений, которую можно привести к виду :

$$\alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha, \; h_1 = -h_2 \equiv h, \; \frac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi} = \frac{2h}{\sin 2\alpha}, \; \rho_1\rho_1' t = d^2 \sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\alpha). \tag{5}$$

Здесь буквой d обозначено расстояние между граничными точками конгруэнции $\{r\}$. Из первых двух уравнений системы (5) следует, что специальная пара T конгруэнций симметрична. В работе [2,с.403] приведены условия расслоения пары конгруэнций:

$$\begin{gathered} A_1 \wedge \Omega_{23} - H_2 \wedge \Omega_{13} = 0, \quad A_2 \wedge \Omega_{13} - H_1 \wedge \Omega_{23}, \quad A_1 \wedge A_2 - H_1 \wedge H_2 = 0, \\ A_1 \wedge Q_2 - H_2 \wedge Q_1 = 0, \quad A_2 \wedge Q_1 - H_1 \wedge Q_2 = 0, \quad Q_1 \wedge \Omega_{23} - Q_2 \wedge \Omega_{13} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя выражения форм A_a, Q_a из системы уравнений (3) в систему уравнений (6), получим, что эти уравнения не удовлетворяются. Следовательно, специальная пара T конгруэнций не расслояема.

Обозначим буквой T_o такие пары T конгруэнций, соответствующие прямые которых пересекают прямые конгруэнции общих перпендикуляров в их фокусах K_a.

Теорема 2. Пара T_o конгруэнций симметрична тогда и только тогда, когда биссектральные плоскости фокальных плоскостей конгруэнции общих перпендикуляров гармонически делят пару плоскостей, проходящих через прямую конгруэнции общих перпендикуляров и через соответствующие прямые пары.

Доказательство. 1) Пусть пара T_o отнесена к трехграннику Гишара. Допустим, что сложное отношение $(\gamma_1\gamma_2;\sigma_1\sigma_2) = -1$. Здесь γ_a- биссектральные плоскости фокальных плоскостей Π_a конгруэнции $\{r\}$, а σ_a- плоскости, проходящие через прямые r и r_a. Тогда

$$\frac{\sin(\vec{e}_1,\vec{\eta}_1)}{\sin(\vec{\eta}_1,\vec{e}_2)} : \frac{\sin(\vec{e}_1,\vec{\eta}_2)}{\sin(\vec{\eta}_2,\vec{e}_2)} = -1.$$

Подставляя $\sin(\vec{\eta}_1,\vec{e}_2) = \sin((\vec{\eta}_1,\vec{e}_1) + (\vec{e}_1,\vec{e}_2)) = \sin((\vec{\eta}_1,\vec{e}_1) + \frac{\pi}{2}) =$

$$= \sin(-(\vec{e}_1,\vec{\eta}_1) + \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\vec{e}_1,\vec{\eta}_1) = \cos\alpha_1,$$

$$\sin(\vec{e}_1,\vec{\eta}_1) = \sin\alpha_1, \; \sin(\vec{e}_1,\vec{\eta}_2) = \sin\alpha_2, \; \sin(\vec{\eta}_2,\vec{e}_2) = \cos\alpha_2,$$

получим $\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}:\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}=-1$ или $\sin(\alpha_1+\alpha_2)=0$. Таким образом, $\alpha_1=-\alpha_2$. Но по условию $h_1=-h_2$. Следовательно, пара T_o симметрична.

2) Верно и обратное. Если пара T_o конгруэнций симметрична, то $\alpha_1=-\alpha_2$, $h_1=-h_2$. Тогда

$$(\gamma_1\gamma_2;\sigma_1\sigma_2)=\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}:\frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}=-1.$$

Теорема 3. Пара T_o конгруэнций в общем случае симметрична тогда и только тогда, когда она расслояема.

Доказательство. 1) Известно, что если в общем случае пара Т конгруэнций симметрична, то она расслояема [1,с.143]. Следовательно, это верно и для пар T_o конгруэнций.

2) Если пара T_o конгруэнций расслояема в общем случае, то удовлетворяются уравнения системы (6). Подставляя в последнее уравнение ω^1 и ω^2 из (4), получим

$$\tfrac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi}\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)=(h_1+h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2).$$

Так как для пар T_o : $h_1+h_2=0$, то из полученного уравнения $\sin(\alpha_1+\alpha_2)=0$, т.е. $\alpha_1=-\alpha_2$ и, следовательно, пара T_o симметрична.

Теорема 4. Пара T_o конгруэнций симметрична и не расслояема тогда и только тогда, когда соответствующие прямые лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров, либо параллельны нормалям фокальных плоскостей этой конгруэнции.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 рассматриваемые пары T_o конгруэнций являются специальными. Такие пары определяются системой уравнений (3). Если конфигурация отнесена к трехграннику Гишара, то имеют место уравнения (5). Учитывая, что $2\hat{\rho}=2h$ в случае пары T_o, получим $\sin 2\alpha=\sin 2\varphi$. Отсюда следует, что либо а) $2\varphi=2\alpha$, либо б) $2\varphi=\pi-2\alpha$. В случае а) $t\rho_1\rho_1'=0$ или в соответствии с первыми уравнениями системы (3) $\rho_1'\rho_2=0$. Так как $\rho=0$, то $\rho_1\rho_2'=0$. Отсюда следует, что $\rho_1=\rho_2=0$ (или $\rho_1'=\rho_2'=0$). Тогда фокальные поверхности (K_a) конгруэнции $\{r\}$ совпадают с фокальными поверхностями (F_a) конгруэнции $\{r_a\}$ (или с (F_a')). Значит, $r_a\subset\Pi_a$, т.е. соответствующие прямые лежат в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров. В случае б) прямые r_a соответственно параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции $\{r\}$.

Обратно, если $r_a \subset \Pi_a$ и пара конгруэнций есть пара T_o, то выполняется условие $\left(d\vec{K}_a, \vec{\eta}_a, \vec{e}_3\right) = 0$, из которого имеем : Q_a =0. Используя условие (4), получим, что $\alpha_1 = -\alpha_2$. Присоединяя сюда данное условие $h_1 = -h_2$, приходим к выводу о том, что пара T_o конгруэнций симметрична в этом случае. Из условия $r_a \subset \Pi_a$ следует, что (F_a)=(K_a) и тогда $\rho = 0$, т.е. пара T_o - специальная.

Если же прямые r_a соответственно параллельны нормалям фокальных плоскостей (K_a) конгруэнции {r}, то выполняются условия

$$Q_a = \Omega_{a3} = \frac{\left(h_1 - h_2\right)\cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)}{\sin^2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)}.$$

Предполагая, что $\rho \neq 0$, с помощью уравнений (4) можно получить, что пара симметрична. Однако, как показано в работе [2,с.410] конгруэнции пары вырождаются в линейчатые поверхности. Следовательно, $\rho = 0$ и пара T_o конгруэнций - специальная. В соответствии с теоремой 1 и в том и в другом случаях пара симметрична и не расслояема.

Буквой $\widetilde{T}$ обозначим пары T конгруэнций, у которых постоянно расстояние между соответствующими прямыми и угол между ними. Пары $\widetilde{T}$ конгруэнций определяются системой уравнений (1), к которой надо присоединить условия

$$A_1 = A_2 \equiv A, \; H_1 = H_2 \equiv H. \qquad (7)$$

Теорема 5. Пара $\widetilde{T}$ конгруэнций симметрична, если не является равнонаклонной II типа.

Доказательство. Если пара $\widetilde{T}$ является специальной, то она симметрична по теореме 1. Пусть пара конгруэнций $\widetilde{T}$ - общего вида. Такие пары определяются системой уравнений (2), (7). Преобразуя эти уравнения, в частности, получим :

$$H\left(\rho_2 - \rho_2'\right) - A\left(\rho_1 - \rho_1'\right) + \Omega_{13}\frac{g}{h_1 - h_2} = 0, H\left(\rho_1 - \rho_1'\right) - A\left(\rho_2 - \rho_2'\right) + \Omega_{23}\frac{g}{h_1 - h_2} = 0. \qquad (8)$$

Здесь $g = \rho_1\rho_2 - \rho_1'\rho_2'$. При $g \neq 0$ систему (8) можно разрешить относительно H и A. Тогда пары $\widetilde{T}$ конгруэнций в соответствии с [5,с.115] определяются системой уравнений

$$A = \alpha\Omega_{13} + \beta\Omega_{23}, \; H = -\beta\Omega_{13} - \alpha\Omega_{23}, \; Q_1 = \lambda\Omega_{13} + \mu\Omega_{23}, \; Q_2 = \mu\Omega_{13} + \lambda\Omega_{23}, \qquad (9)$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\mu \neq 0$. Отнеся рассматриваемую пару конгруэнций к трехграннику Гишара, из последних двух уравнений системы (9) после подстановки туда значений ω_1^3, ω_2^3 из (4), в частности, получим $\alpha_1 = -\alpha_2$, $h_1 = -h_2$. Итак, пары $\widetilde{T}$ конгруэнций в случае $g \neq 0$ являются симметричными. В случае, когда g=0 система уравнений (8) однородна и имеет ненулевые решения только при условии равенства нулю определителя системы, т.е. при условии $\rho_1 - \rho_1' = \rho_2 - \rho_2'$. Учитывая $g=0$, т.е. $\rho_1 \rho_2 = \rho'_1 \rho'_2$, получим $\rho'_1 = -\rho_2$, $\rho'_2 = -\rho_1$. Такие пары конгруэнций являются равнонаклонными II типа. Можно доказать, что такие пары не симметричны.

Заметим, что специальная пара T конгруэнций является парой $\widetilde{T}$ тогда и только тогда, когда конгруэнция $\{r\}$ общих перпендикуляров псевдосферическая и $\rho'_1 \rho_2 = \rho_1 \rho'_2 = \text{const}$.

Теорема 6. В общем случае пары $\widetilde{T}$ конгруэнций конгруэнции, входящие в пару, являются нормальными тогда и только тогда, когда $\rho_1 \rho'_1 = \rho_2 \rho'_2 = \text{const}$ $(g \neq 0)$.

Доказательство. В общем случае пары $\widetilde{T}$ конгруэнций при $g \neq 0$ определяются системой уравнений (9). К ней надо присоединить условие $\rho_1 \rho'_1 = \rho_2 \rho'_2 = m = \text{const}$. В этом случае в системе уравнений (9) :

$$\alpha = -\frac{m(\rho_1 - \rho'_1)}{\rho(h_1 - h_2)}, \quad \beta = \frac{m(\rho_2 - \rho'_2)}{\rho(h_1 - h_2)}, \quad \mu = \frac{m}{h_1 - h_2}, \quad \lambda = 0. \tag{10}$$

После дифференцирования внешним образом системы уравнений (9) с коэффициентами (10), подставим туда Q_a, A и H из системы (9). Из двух квадратичных уравнений этой системы в силу линейной независимости форм Ω_{a3} получим, что

$$(h_1 - h_2)^2 + \rho_a \rho'_a \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \tag{11}$$

Условие (11) означает перпендикулярность фокальных плоскостей конгруэнции $\{r_a\}$. Следовательно, конгруэнции пары $\widetilde{T}$ - нормальные.

Обратно, если конгруэнции пары $\widetilde{T}$ - нормальные, то выполняется условие (11). Так как $h_1 - h_2 = \text{const}$, $\alpha_1 - \alpha_2 = \text{const}$, то $\rho_1 \rho'_1 = \rho_2 \rho'_2 = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что у пары $\widetilde{T}$ нормальных конгруэнций конгруэнция общих перпендикуляров - псевдосферическая. При этом фокальными поверхностями этой конгруэнции являются поверхности (K_a) [6,с.78]. Пары $\{r_a\}$ сопряженные, симметричные и расслояемые.

Библиографический список

1. *Редозубова О.С.* Метрическая теория пар T конгруэнций // Уч.зап. МГПИ. М., 1957. Т.108.

2. *Фиников С.П.* Теория пар конгруэнций. М., 1956.

3. *Редозубова О.С.* Пары T конгруэнций с прямой и обратной пропорциональностью абсцисс фокусов // Уч.зап. МГПИ. М., 1967. № 271.

4. *Фиников С.П.* Теория конгруэнций. М.-Л., 1950.

5. *Редозубова О.С.* К вопросу о специальных видах пар Т конгруэнций // Вопр. диф. и неевкл. геом. М.; 1965.
6. *Редозубова О.С.* О метрических свойствах пар Т конгруэнций // Там же, 1973.

O.S. R e d o z u b o v a

SYMMETRIC PAIRES OF T CONGRUENCES

Results have been united on the theory of symmetric paires of T congruences, which were obtained in different years.