УДК 514.76+517.93

О ТОЧЕЧНО-ТРАЕКТОРНЫХ ИЗОМОРФИЗМАХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В.А. И г о ш и н

(Нижегородский гос. ун-т им. Н.И.Лобачевского)

С помощью осуществленного автором в [1] (см. также [2], [3] и [4]) пульверизационного моделирования найдены некоторые геометрические критерии точечно-траекторных изоморфизмов квазигеодезических потоков.

1. Пусть $f \equiv (M, f)$ - квазигеодезический поток (КП) на дифференцируемом многообразии M, $h \equiv (N,h)$ - КП на N,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i(x^j, t, \frac{dx^j}{dt}) , \quad \frac{d^2y^i}{d\bar{t}^2} = h^i(y^j, \bar{t}, \frac{dy^j}{d\bar{t}})$$

- соответствующие им координатные уравнения ($1 \le i$, $j \le n\text{-}1 = \dim M = \dim N$; здесь и далее все объекты - достаточное число раз дифференцируемые) .

Диффеоморфизм $\bar{\Phi}: \bar{M} = M \times R \to \bar{N} = \bar{N} \times R$ в том и только в том случае является точечным квазиизоморфизмом КП f в КП h , если он же является проективным изоморфизмом стандартных связностей $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, \dot{x})$ и $H^\alpha_{\beta\gamma}(y, \overset{\times}{y})$ КП f и h, т.е. если выполнены условия :

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x, \dot{x}) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x, \dot{x}) = \Psi_\beta \delta^\alpha_\gamma + \Psi_\gamma \delta^\alpha_\beta + \dot{x}^\alpha \Psi_{\beta\gamma} , \qquad (1)$$

в которых $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ - $\bar{\Phi}$-поднятие связности $H^\alpha_{\beta\gamma}$, $1 \le \alpha, \beta, \gamma \le n$ (см. [3]) .

Определение. Квазиизоморфизм $\bar{\Phi}: \bar{M} \to \bar{N}$ КП f в КП h назовем точечно - траекторным , если он переводит слои расслоения - произведения (M,Pr,M) в слои (N,Pr,N) , т.е. если

$$\bar{\Phi}(x,t) = (\Phi(x), \bar{t}(x,t)) ,$$

где $\Phi: M \to N: x \to y = \Phi(x)$ - некоторый диффеоморфизм базовых многообразий, а $\bar{t} = \bar{t}(x,t)$ -функция на M.

Предложение. Для всякого точечно-траекторного изоморфизма $\bar{\Phi}: \bar{M} = M \times R \to \bar{N} = N \times R$ КП (M,f) в КП (N, h) его проекция - диффеоморфизм $\Phi: M \to N$ является траекторным изоморфизмом КП f и h.

Замечание. Величины $\varphi_i = 1/2 \dfrac{\partial \bar{t}}{\partial x^i}$ и $\sigma = \dfrac{\partial \bar{t}}{\partial t}$ по отношению к структуре многообразия M являются, соответственно, ковекторным полем и функцией (зависящей от параметра t) .

2 . Пусть теперь f и h - автономные КП 2-ой степени по “скорости”:

$$\begin{cases} f^i = -\Gamma^i_{jk}(x)\dfrac{dx^j}{dt}\dfrac{dx^k}{dt} + B^i_j(x)\dfrac{dx^j}{dt} + A^i(x), \\ h^i = -H^i_{jk}(y)\dfrac{dy^j}{d\bar{t}}\dfrac{dy^k}{d\bar{t}} + \widetilde{B}^i_j(y)\dfrac{dy^j}{d\bar{t}} + \widetilde{A}^i(y). \end{cases} \qquad (2)$$

Вычисляя коэффициенты поднятой связности $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, находим, в частности (см. также формулы (6) из $[3]$):

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = H^{\#i}_{jk} - \varphi_j B^{\#i}_k - \varphi_k B^{\#i}_j - 4\varphi_j\varphi_k A^{\#i}\ , \qquad (3)$$

$$\overline{\Gamma}^i_{jn} = -\tfrac{1}{2}\sigma B^{\#i}_j - 2\sigma\varphi_j A^{\#i}\ , \qquad (4)$$

$$\overline{\Gamma}^i_{nn} = -\sigma^2 A^{\#i}\ , \qquad (5)$$

$$\overline{\Gamma}^n_{jk} = 2\sigma^{-1}\left[\varphi_{j,k} + \varphi_i(B^{\#i}_j\varphi_k + B^{\#i}_k\varphi_j + 4\varphi_j\varphi_k A^{\#i})\right], \qquad (6)$$

$$\overline{\Gamma}^n_{jn} = \varphi_i B^{\#i}_j + 4\varphi_i\varphi_j A^{\#i} + \sigma^{-1}\sigma_{,j}\ , \qquad (7)$$

$$\overline{\Gamma}^n_{nn} = 2\sigma\varphi_i A^{\#i} + \sigma^{-1}(\partial_t\sigma)\ , \qquad (8)$$

где значком # (диез) отмечены Φ - поднятия (с N на M) соответствующих объектов H^i_{jk}, $\widetilde{B}^i_j$ и $\widetilde{A}^i$; $\varphi_{j,k} = \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x^k} - H^{\#i}_{jk}\varphi_i$.

Условия (1) и (3) - (8) приводят к следующему критерию точечно-траекторного изоморфизма КП 2-й степени.

Теорема . Пусть f ≡ (M, f) и h≡(N,h) - два КП 2-ой степени с координатными уравнениями (2). Изоморфизм $\overline{\Phi}\colon \overline{M} = M\times R \to \overline{N} = N\times R$ расслоений - произведений (M,Pr,M) и (N,Pr,N) , т.е. диффеоморфизм вида $\overline{\Phi}(x,t) = (\Phi(x), \bar{t}(x,t))$ тогда и только тогда будет точечно-траекторным изоморфизмом КП f и h в случае $A = A^i\partial_i \neq 0$ в каждой точке M, или при A≡0 в случае линейной независимости аффиноров B^i_j и δ^i_j в каждой точке M, когда:

$$\Gamma^i_{jk} = H^{\#i}_{jk} + \widetilde{\psi}_j\delta^i_k + \widetilde{\varphi}_k\delta^i_j + \widetilde{\varphi}_j B^i_k + \widetilde{\varphi}_k B^i_j + 4\widetilde{\varphi}_j\widetilde{\varphi}_k A^i\ , \qquad (9)$$

$$B^{\#i}_j = \widetilde{\sigma}B^i_j + 4\widetilde{\sigma}\widetilde{\varphi}_j A^i + 2\widetilde{\psi}_n\delta^i_j\ , \qquad (10)$$

$$A^{\#i} = \widetilde{\sigma}^2 A^i\ , \qquad (11)$$

$$\widetilde{\varphi}_{(j,k)} = 2\widetilde{\varphi}_{(j}\widetilde{\psi}_{k)}\ , \qquad (12)$$

$$\widetilde{\psi}_i = \widetilde{\varphi}_s B^s_i + 4\widetilde{\varphi}_i\frac{\widetilde{\psi}_n}{\widetilde{\sigma}}\ , \qquad (13)$$

$$\widetilde{\varphi}_s A^s = \frac{\widetilde{\psi}_n}{\widetilde{\sigma}}\ , \qquad (14)$$

где $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\psi}_n$ - функции , а $\widetilde{\psi}_i$ и $\widetilde{\varphi}_i$ - ковекторные поля на M (не зависящие от " времени " t), запятая в (12) - символ ковариантной производной в связности $H^{\# i}_{jk}$, скобки в (12) обозначают симметрирование. При этом:

$$\widetilde{\sigma} = \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \right)^{-1} = \mathrm{const} \neq 0 \text{ , } \widetilde{\varphi}_i = -1/2\widetilde{\sigma} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x^i} \text{ .}$$

Замечания. 1) В отличие от критериев траекторных изоморфизмов КП 2-й степени различных типов (например, типов А, B_1 и B_2 из $[5]$ и $[6]$; см. также $[7]$ и $[8]$) теорема справедлива и для не типичных (особых) КП .

2) Теорема имеет место для КП любой размерности (≥ 1), в то время как в типичных траекторных случаях имеются ограничения: dim M≥3 для КП типа А, dim M≥2 для типов B_1 и B_2 $[5]$ - $[8]$; единственное ограничение dim M≥2 накладывается в теореме условием линейной независимости аффиноров B^i_j и $\delta_j^{\ i}$.

3) С помощью доказанной теоремы можно получить критерии инфинитезимальных точечно - траекторных симметрий КП 2-й степени.

Библиографический список

1. Игошин В. А. Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С. 531 - 535.

2. Игошин В. А. Пульверизационное моделирование. I // Изв. вузов. Математика. 1992. № 6. С. 63 - 70.

3. Игошин В. А. Пульверизационное моделирование. II // Там же. 1994. № 10. С. 26 - 32.

4. Игошин В. А. Пульверизационное моделирование. III // Там же. 1995. № 5. С. 39 - 50.

5. Игошин В. А. О квазигеодезических потоках // Горьковск. ун-т. Горький, 1989. 67 с. Деп. в ВИНИТИ 18.01.90, № 392 - В90.

6. Игошин В. А. Гомоморфизмы квазигеодезических потоков 2-й степени // Изв. вузов. Математика. 1990. № 9. С. 14 -21.

7. Шапиро Я. Л. Пространства, включающие проективные системы кривых // Труды семин. по векторн. и тензорн. анализу. Вып. 6. М.: МГУ, 1948. С. 494 - 505.

8. Шапиро Я. Л., Игошин В. А., Яковлев Е. И. Морфизмы дифференциальных уравнений 2-го порядка и 2-й степени // Изв. вузов. Математика. 1984. № 4. С. 80-82.

V.A. I g o s h i n

ABOUT POINT-TRAJECTORY ISOMORPHISMS
OF QUASIGEODESIC FLOWS

By means of pulverization (geodesic) modelling theory, which belong to the author, it is obtained some geometric criterions of point-trajectory isomorphisms of quasigeodesic flows.

УДК 514.75

НЕГОЛОНОМНАЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

В.В. К а й з е р

(Фридрих-Александр-Университет Эрлангена-Нюренберга)

Приводится математическое содержание письма В.С.Малаховскому от В.В.Кайзера о неголономных конгруэнциях и неголономных комплексах прямых в трехмерном проективном пространстве. Указана связь с дифференциальной геометрией многообразий фигур.

Посылаю Вам одну из своих заметок* по локальной дифференциальной геометрии гладких распределений (в русской литературе прижился термин - распределения касательных элементов) на грассмановом многообразии M всех прямых трехмерного проективного пространства. Поскольку dim M=4, возможны только двумерные и трехмерные нетривиальные распределения на этом многообразии. Первые я называю неголономными конгруэнциями, а вторые - неголономными комплексами. Терминология навеяна разумеется тем, что, как Вам безусловно хорошо известно, в случае интегрируемости такового распределения, через каждую прямую l из M проходит его единственное максимальное интегральное многообразие, представляющее собой двумерное или соответственно трехмерное подмногообразие грассманова многообразия, для которых уже, как известно, давно сложились наименования конгруэнций и комплексов. Мне известен ряд работ Литовских и Томских геометров по этой тематике. Первые из них трактуют неголономную линейчатую геометрию несколько иначе, чем это делаю я, а вторые основной упор делают на изучении только совокупности интегральных линейчатых поверхностей (регулюсов или в немецкой терминологии Regelfläche) или в терминологии В.В.Вагнера допустимых регулюсов (непонятно, почему следует считать недопустимыми неинтегральные кривые распределения?), эту совокупность томичи, следуя Инцингеру, называют пфаффовыми многообразиями. Я следую здесь скорее Ю.Г.Лумисте с его подходом к неголономной геометрии на однородных пространствах как к теории распределений на них.

Много основных понятий дифференциальной геометрии неголономных конгруэнций и комплексов можно перенести на случай неинтегрируемых распределений на грассмановом многообразии. Думаю, что и это Вам также хорошо известно, так же как и то, что при переходе к неголономному случаю некоторые понятия “голономной” геометрии как бы раздваиваются или даже “размножают-

* Будет опубликована в следующих выпусках.