ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I9 1988

УДК 514.75

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОНОРМИРОВАННОГО РЕПЕРА НА ПОВЕРХНОСТИ

Н.П.К а м е н с к и й
(Калужский пединститут)

Тензорное изложение метода подвижного трехгранника дано в монографии [I].Используя задание поверхности метрикой и векторным полем специального вида [2],строится ортонормированный репер,инвариантно связанный с поверхностью относительно группы движений.Составляются условия интегрируемости.Выясняются условия,эквивалентные уравнениям Гаусса и Петерсона-Кодацци , которые надо наложить на метрику и векторное поле,чтобы их заданием определялась поверхность с точностью до положения в пространстве.Приводятся некоторые примеры.

I.Рассмотрим неразвертывающуюся поверхность $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$, отличную от поверхности $K=const$. Тогда с каждой ее точкой в трехмерном евклидовом пространстве связаны две прямые,инвариантные относительно группы движений,направление которых определяется метрической и аффинной нормалями.Определение аффинной нормали см.[3, с. I05]. Если $\vec{n}$ -орт метрической,а $\vec{\eta}$ - специальным образом нормированный вектор аффинной нормали , то имеет место соотношение [2, с. I09]:

$$\vec{\eta}=s^i\vec{r}_i+\vec{n}, \quad \vec{r}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^i}; \qquad s^i=\check{h}^{ij}t_j \quad (i,j,\ldots=1,2), \tag{I.I}$$

где $\check{h}^{ij}$ -тензор,взаимный второму тензору поверхности h_{ij}, $t_j=\frac{1}{4}\partial_j \ln K$ -чебышевский вектор асимптотической сети.Считая векторное поле $S^i(u^1,u^2)$ известным,задаваясь также метрикой $g_{ij}\,du^i du^j$,имеющей кривизну $K\neq const$, для определения h_{ij} , мы можем рассмотреть систему трех алгебраических уравнений:

$$h_{ij}S^j=t_i, \quad \overset{\perp}{h}{}^{ij}h_{ij}=2K, \tag{I.2}$$

где $\overset{\perp}{h}{}^{ij}=\varepsilon^{ki}\varepsilon^{\ell j}h_{k\ell}$, ε^{ki}-тензор,взаимный дискриминантному тензору поверхности ε_{ji} $(\varepsilon_{11}=\varepsilon_{22}=0,\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2})$. Решением системы (I.2) при $Q=s^it_i=h_{ij}s^is^j\neq 0$ служит тензор

$$h_{ij}=\frac{1}{Q}(t_it_j+K\tilde{s}_i\tilde{s}_j), \quad \tilde{s}_i=\varepsilon_{ki}s^k. \tag{I.3}$$

Условие Гаусса для данного строения h_{ij} тождественно удовлетворяется,а условия,эквивалентные уравнениям Петерсона-Кодацци,будут

$$\varepsilon^{jk}h_{ij|k}=(\ell_{ij|k}-\ell_{ij}V_k)\varepsilon^{jk}=0, \tag{I.4}$$

где $\ell_{ij}=t_it_j+K\tilde{s}_i\tilde{s}_j$, $V_k=\partial_k \ln Q$. Но в таком случае имеет место

Т е о р е м а I. Заданием метрики и векторного поля $S^i(u^1,u^2)$ специального вида (I.I),удовлетворяющих условиям $Q=s^it_i\neq 0$ и (I.4), в пространстве E_3 определяется с точностью до положения единственная поверхность,для которой g_{ij} и h_{ij} служат метрическим и вторым тензорами.

Если же совместный инвариант метрики и векторного поля $Q=S^it_i=0$,то $t_it_j+K\tilde{S}_i\tilde{S}_j=0$, откуда $t_i=\sqrt{-K}\,\tilde{S}_i$. Последним условием определяется поверхность типа Бианки [I, с.399],инвариантным признаком которой теперь служит соленоидальность векторного поля (I.I),определяющего на этой поверхности асимптотические линии,вдоль которых $K=const$ [2, с. II2].

2.С каждой точкой,определенной выше поверхности $\vec{r}=\vec{r}(u^1,u^2)$, свяжем ортонормированный репер,составленный ортом нормали $\vec{n}=\vec{e}_3$ и ортами касательной плоскости $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$,определяемыми из разложения

$$\vec{r}_i=e_i\vec{e}+\tilde{e}_i\vec{e}_2, \tag{2.I}$$

где e_i , $\tilde{e}_i$ -два единичных вектора внутренней геометрии, удовлетворяющие условию ортогональности.Ориентация ортов репера,подчиненная условию $(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)=1$,устанавливает в касательной плоскости положительное направление вращения.Связь векторов e_i и $\tilde{e}_i$ устанавливается с помощью дискриминантного тензора ε_{ij} по закону:

$$\tilde{e}_i=\varepsilon_{ki}e^k, \quad \tilde{e}_ie^i=0. \tag{2.2}$$

Но тогда бивектор ε_{ij} производит поворот на 90^0 в положительном направлении. В качестве вектора $e_i=g_{ik}e^k$ возьмем единичный вектор поля (I.I),т.е.

$$e^k=\mu\,\check{h}^{kj}t_j, \tag{2.3}$$

где $\mu(u^1,u^2)$ -нормирующая функция, имеющая геометрический смысл $\mu=\frac{1}{S}$, S -модуль поля (I.I), т.е. $S^i=S\cdot e^i$. Заметим, что решением системы (2.3) относительно h_{ij} может служить множество тензоров вида

$$h_{ij}=\mu\,(e_i t_j+\tilde{e}_i q_j). \tag{2.4}$$

3. Запишем формулы разложения производной вектора $\vec{r}$ и производных ортов репера по самим векторам. Принимая во внимание (2.4), определение векторов $\vec{e}_1=e^i\vec{r}_i$ и $\vec{e}_2=\tilde{e}^i\vec{r}_i$, получим (2.I) и

$$\vec{e}_{1,i}=\alpha_i\vec{e}_2+\mu t_i\vec{e}_3,\ \vec{e}_{2,i}=-\alpha_i\vec{e}_1+\mu q_i\vec{e}_3,\ \vec{e}_{3,i}=-\mu t_i\vec{e}_1-\mu q_i\vec{e}_2, \tag{3.I}$$

где вектор α_i -трансверсальный вектор поля ортов e_i или $\tilde{e}_i$ и участвует в разложении ковариантных производных [4, с. I36]

$$e_{i|j}=\alpha_j\tilde{e}_i,\ \tilde{e}_{i|j}=-\alpha_j e_i, \tag{3.2}$$

а векторы μt_i и μq_i выражаются с помощью (2.4) разложений (3.I) следующим образом:

$$\mu t_i=h_{ik}e^k=\vec{e}_{1,i}\vec{e}_3;\ \mu q_i=h_{ik}e^k=\vec{e}_{2,i}\cdot\vec{e}_3. \tag{3.3}$$

Составим теперь условия интегрируемости системы уравнений (2.I) и (3.I), заменяя производные ортов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ и e_i по формулам (3.I), (3.2). Для этого достаточно свернуть с бивектором ε^{ij} результаты их ковариантного дифференцирования. Получим

а) $\varepsilon^{ij}\vec{r}_{ij}=\varepsilon^{ij}[(\alpha_j\tilde{e}_i-\alpha_j\tilde{e}_i)\vec{e}_1+(\alpha_j e_i-\alpha_j e_i)\vec{e}_2+\mu(e_i t_j+\tilde{e}_i q_j)\vec{e}_3]=\varepsilon^{ij}h_{ij}\vec{e}_3=0.$

Откуда следует симметричность тензора h_{ij}. Но в таком случае, согласно (3.3), будем иметь $\mu t_i\tilde{e}^i=\mu q_i e^i$. Последнее дает возможность представить разложения векторов t_i и q_i в следующем виде:

$$t_i=e^k t_k\cdot e_i+\tilde{e}^k t_k\cdot\tilde{e}_i;\ q_i=\tilde{e}^k t_k\cdot e_i+\tilde{e}^k q_k\cdot\tilde{e}_i. \tag{3.4}$$

б) В свою очередь условия интегрируемости уравнений (3.I) будут иметь вид:

$$(\mu\tilde{t}^i)\cdot(\mu q_i)=K,\ \tilde{\alpha}^i(\mu q_i)+(\mu\tilde{t}^i)_{|i}=0,\ \tilde{\alpha}^i(\mu t_i)-(\mu\tilde{q}^i)_{|i}=0. \tag{3.5}$$

Условие (3.5_1) эквивалентно условию Гаусса, а условия (3.5_2) и (3.5_3)-уравнениям Петерсона-Кодацци. Действительно, согласно (3.3): $\mu t_i=h_{ik}e^k$, $\mu q_j=h_{js}\tilde{e}^s$. Поэтому

$$(\mu\tilde{t}^i)(\mu q_i)=\varepsilon^{ij}(\mu t_i)(\mu q_j)=\varepsilon^{ij}h_{ik}e^k h_{js}\tilde{e}^s=h^{j}{}_{k}h_{js}e^{[k}\tilde{e}^{s]}=$$
$$=\tfrac{1}{2}h^{j}{}_{k}h_{js}\varepsilon^{ks}=\tfrac{1}{2}h^{js}h_{js}=\frac{h}{g}=K,$$

где g, h -дискриминанты первой и второй квадратичных форм и произведена очевидная замена $e^{[k}\tilde{e}^{s]}=\frac{1}{2}\varepsilon^{ks}$. Аналогично:

$$\tilde{\alpha}^i(\mu q_i)+(\mu\tilde{t}^i)_{|i}=\varepsilon^{ij}[(\mu t_i)_{|j}-(\mu q_i)\cdot\alpha_j]=\varepsilon^{ij}[(h_{is}e^s)_{|j}-h_{is}\tilde{e}^s\alpha_j]=$$
$$=\varepsilon^{ij}[h_{is|j}e^s+h_{is}\tilde{e}^s\cdot\alpha_j-h_{is}\tilde{e}^s\cdot\alpha_j]=\varepsilon^{ij}h_{is|j}e^s=0,$$
$$\tilde{\alpha}^i(\mu t_i)-(\mu\tilde{q}^i)_{|i}=\varepsilon^{ij}[(\mu q_i)_{|j}+\mu t_i\cdot\alpha_j]=\varepsilon^{ij}[(h_{is}\tilde{e}^s)_{|j}+h_{is}e^s\cdot\alpha_j]=$$
$$=\varepsilon^{ij}[h_{is|j}\tilde{e}^s-h_{is}e^s\cdot\alpha_j+h_{is}e^s\cdot\alpha_j]=\varepsilon^{ij}h_{is|j}\cdot\tilde{e}^s=0,$$

что в силу линейной независимости векторов e^s и $\tilde{e}^s$ равносильно одному векторному уравнению

$$h_{is|j}\varepsilon^{ij}=0. \tag{3.6}$$

С целью выяснения вопроса, с каким произволом метрика и единичное векторное поле (2.3) определяют поверхность, присоединим к системе (2.4) еще одно уравнение $\frac{1}{2}h^{ij}h_{ij}=K$. Как было показано выше, оно эквивалентно уравнению $(\mu\tilde{t}^i)(\mu q_i)=K$, которое с учетом разложений (3.3) может быть представлено в виде

$$(\mu e^k t_k)(\mu\tilde{e}^k q_k)-(\mu\tilde{e}^k t_k)^2=K. \tag{3.7}$$

Таким образом, в уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци (3.5) входят связанные между собой две величины $\mu(u^1,u^2)$ и $\tilde{e}^k q_k$, которые заданием метрики и векторного поля (2.3) остаются неопределенными. Поэтому, прежде чем делать выводы и формулировать соответствующие результаты, с помощью дополнительных условий попытаемся избавиться от этих величин. Например, полагая $\tilde{e}^k q_k=-e^k t_k$, согласно (3.4), получим

$$q_i=\tilde{e}^k t_k\cdot e_i-e^k t_k\cdot\tilde{e}_i=-(e^k t_k\cdot\tilde{e}_i-\tilde{e}^k t_k\cdot e_i)=-\tilde{t}_i.$$

Для функции $\mu(u^1,u^2)$ из (3.5) и тензора h_{ij} из (2.4) получим с точностью до знака следующие выражения:

$$\mu=\sqrt{-K}\,(g^{ij}t_i t_j)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

$$h_{ij}=\sqrt{-K}\,(g^{ij}t_i t_j)^{-\frac{1}{2}}(e_i t_j-\tilde{e}_i\tilde{t}_j), \tag{3.9}$$

причем $g^{ij}h_{ij}=0$.

Условие Гаусса для данного строения h_{ij} будет выполнено, а условия Петерсона-Кодацци после некоторых преобразований примут вид:

$$\alpha_k t^k = \frac{\mu_k}{\mu} \tilde{t}^k, \quad \alpha_k \tilde{t}^k = K - \frac{\mu_k}{\mu} t^k. \qquad (3.10)$$

Умножая обе части (3.10_1) на t_i, а (3.10_2) на $\tilde{t}_i$, складывая почленно, разделив обе части полученного соотношения на $g^{ij} t_i t_j = -\frac{K}{\mu^2}$, получим:

$$\alpha_i = -\frac{\mu}{K} [\mu_k \tilde{t}^k \cdot t_i + (\mu K - \mu_k t^k) \cdot \tilde{t}_i]. \qquad (3.11)$$

Проводя рассуждения в обратном порядке, получим, что из (3.11) следует выполнение условий Петерсона-Кодацци (3.5_2), (3.5_3) для тензоров g_{ij} и h_{ij} (последний определяется формулой (3.9)). Тем самым доказана

Т е о р е м а 2. При выполнении условий $g^{ij} t_{ij} = -K$ (такому условию должна удовлетворять метрика минимальной поверхности) и (3.11) существует единственная минимальная поверхность, для которой заданная квадратичная форма $g_{ij} du^i du^j$ служит ее метрической формой, а векторное поле (2.3) определяет направление, ассоциированное [4, с.51] с метрической и аффинной нормалями, причем $\mu = ctg\,\varphi$, где φ -угол между метрической и аффинной нормалями [5, с. 26].

4. Заметим, что на каждой неразвертывающейся поверхности, отличной от поверхности $K = const$, определяется единственная сеть, направляющими векторами которой служат векторы e_i и $\tilde{e}_i$. Инвариантами линий этой сети будут нормальные кривизны, а также геодезическое кручение, определяемые условиями:

$$\rho = h_{ij} e^i e^j = \frac{e^k t_k}{S}, \quad \sigma = h_{ij} \tilde{e}^i \tilde{e}^j = \frac{\tilde{e}^k q_k}{S}, \quad \varkappa = h_{ij} \tilde{e}^j e^i = \frac{\tilde{e}^k t_k}{S}. \qquad (4.1)$$

Теперь выражение h_{ij} из (2.4) представится в виде

$$h_{ij} = \rho e_i e_j + \sigma \tilde{e}_i \tilde{e}_j + \varkappa (e_i \tilde{e}_j + \tilde{e}_i e_j), \qquad (4.2)$$

а уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци

$$\tfrac{1}{2} h^{ij} h_{ij} = \tfrac{1}{2}[\rho \tilde{e}^i \tilde{e}^j + \sigma e^i e^j - \varkappa(e^i \tilde{e}^j + \tilde{e}^i e^j)] \cdot h_{ij} = \rho\sigma - \varkappa^2 = K,$$

$$\varepsilon^{jk} h_{ij|k} = \{(\rho_k - 2\varkappa\alpha_k)\tilde{e}^k - [\alpha_k(\rho-\sigma) + \varkappa_k] e^k\} e_i + \{-(\sigma_k + 2\varkappa\alpha_k) e^k + [\alpha_k(\rho-\sigma) + \varkappa_k] \tilde{e}^k\} \tilde{e}_i = 0$$

вследствие независимости векторов e_i и $\tilde{e}_i$ будут эквивалентны соответственно уравнениям:

$$\rho\sigma - \varkappa^2 = K, \qquad (4.3)$$

$$\begin{cases} \rho_k \tilde{e}^k = (\rho-\sigma) K_e + 2\varkappa \cdot K_{\tilde{e}} + \varkappa_k e^k, \\ \sigma_k e^k = (\rho-\sigma) K_{\tilde{e}} - 2\varkappa \cdot K_e + \varkappa_k \tilde{e}^k, \end{cases} \qquad (4.4)$$

где $K_e = \alpha_k e^k$ и $K_{\tilde{e}} = \alpha_k \tilde{e}^k$ -геодезические кривизны линий поля e_i и их ортогональных траекторий, которые определяются из разложения [4, с. 149]:

$$\alpha_i = K_e \cdot e_i + K_{\tilde{e}} \cdot \tilde{e}_i. \qquad (4.5)$$

Из (4.1) следует, что заданием метрики и векторного поля (1.1) нормальная кривизна $\sigma = \frac{1}{S} \tilde{e}^k q_k$ в общем случае не определяется. Поэтому, используя геометрический смысл связей σ с другими инвариантами сети или абсолютными инвариантами поверхности, исключая с помощью этих связей σ из рассмотрения, мы можем получать класоы поверхностей (отдельные поверхности), обладающие определенными геометрическими свойствами. Эти свойства можно будет "читать", пользуясь соответствующим выражением (4.2) второго тензора поверхности.

5. Рассмотрим некоторые приложения:

а) Полагая $\sigma = 0$, из (4.3) найдем $\varkappa = \pm\sqrt{-K}$. Тогда

$$h_{ij} = \rho e_i e_j + \sqrt{-K} (e_i \tilde{e}_j + \tilde{e}_i e_j). \qquad (5.1)$$

Для данного строения h_{ij} уравнение Гаусса удовлетворяется, а уравнения Петерсона-Кодацци могут быть представлены в виде

$$\rho_k \tilde{e}^k \cdot e_i = \rho \alpha_i - 2\varkappa \tilde{\alpha}_i + \varkappa_i. \qquad (5.2)$$

Тогда будет иметь место следующая

Т е о р е м а 3. Заданием метрики и векторного поля (1.1), удовлетворяющих условиям (5.2), определяется с точностью до положения единственная поверхность, второй тензор которой имеет вид (5.1). На этой поверхности ортогональные траектории поля (1.1) (или (2.3)) определяют асимптотические линии, а геодезическое кручение линий сети в каждой точке равно $\pm\sqrt{-K}$.

б) Полагая $\rho \neq 0$, из (4.3) следует $\sigma = \frac{1}{\rho}(K + \varkappa^2)$. Подставляя полученное значение σ в (4.2), получим:

4 Зак. 806

$$h_{ij} = \rho e_i e_j + \frac{K+\varkappa^2}{\rho}\tilde{e}_i\tilde{e}_j + \varkappa(e_i\tilde{e}_j + \tilde{e}_i e_j).$$

Уравнение Гаусса для данного строения h_{ij} выполняется, а уравнения Петерсона-Кодацци будут (4.4), в которое подставляется найденное значение σ. Заметим, что при $\sigma=0$ получаем $\varkappa=\pm\sqrt{-K}$, т.е. случай а).

в) Свертывая обе части (4.2) с g^{ij}, найдем $2H=\rho+\sigma$, откуда $\sigma=2H-\rho$. Подставляя значение σ в (4.2), получим

$$h_{ij}=\rho(e_ie_j-\tilde{e}_i\tilde{e}_j)+\varkappa(e_i\tilde{e}_j+\tilde{e}_ie_j)+2H\tilde{e}_i\tilde{e}_j. \qquad (5.3)$$

Уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци будут иметь соответственно вид:

$$\rho^2+\varkappa^2+K-2H\rho=0, \qquad (5.4)$$

$$\tilde{\rho}_i+2\rho\cdot\alpha_i-2\varkappa\cdot\tilde{\alpha}_i+\varkappa_i-2H\cdot\alpha_i-2H_k e^k\cdot\tilde{e}_i=0. \qquad (5.5)$$

Из (5.4) следует, что при $\rho\neq0$ средняя кривизна $2H=\frac{\rho^2+\varkappa^2+K}{\rho}$ через данные величины однозначно определяется. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 4. Заданием метрики и векторного поля (I.I), удовлетворяющих условиям $\rho\neq0$, (5.4) и (5.5), определяется с точностью до положения в пространстве единственная поверхность, второй тензор которой имеет вид (5.3).

г) Полагая в (5.3), (5.4), (5.5) $H=0$, получим

$$h_{ij}=\rho(e_ie_j-\tilde{e}_i\tilde{e}_j)+\varkappa(e_i\tilde{e}_j+\tilde{e}_ie_j), \qquad (5.3')$$

$$\rho^2+\varkappa^2+K=0, \qquad (5.4')$$

$$\tilde{\rho}_i+2\rho\cdot\alpha_i-2\varkappa\tilde{\alpha}_i+\varkappa_i=0. \qquad (5.5')$$

Поэтому имеет место следующая

Т е о р е м а 5. Заданием метрики и векторного поля (I.I) удовлетворяющих условиям $g^{ij}t_{i|j}=-K$ (поверхность минимальная) (5.5), определяется единственная минимальная поверхность, второй тензор которой имеет вид (5.3).

Используя (5.4), можно записать h_{ij}, выразить (5.5) только через K и $\varkappa$ или только через K и ρ и сформулировать соответствующие результаты.

Кроме того, полагая $\rho=\frac{1}{s}e^kt_k=0$ $(\varkappa=\frac{1}{s}\tilde{e}^kt_k=0)$, из (5.4) найдем $\varkappa=\pm\sqrt{-K}$ $(\rho=\pm\sqrt{-K})$. Условия (5.5) тогда примут соответственно вид $\tilde{\alpha}_i-t_i=0$. Итак, при выполнении условий $\rho=0$, $\tilde{\alpha}_i-t_i=0$ имеем прямой геликоид, второй тензор которого $h_{ij}=\sqrt{-K}(e_i\tilde{e}_j+\tilde{e}_ie_j)$, а при выполнении условий $\varkappa=0$, $\tilde{\alpha}_i-t_i=0$ имеем катеноид, второй тензор которого $h_{ij}=\sqrt{-K}(e_ie_j-\tilde{e}_i\tilde{e}_j)$.

Библиографический список

1. Ш у л и к о в с к и й В.И. Классическая дифференциальная геометрия.М. : Наука.1963.540с.

2. К а м е н с к и й Н.П. Инвариантные признаки некоторых поверхностей, определяемых метрикой и векторным полем//Объединение матем.кафедр пединститутов центральной зоны РСФСР. Тр. объединения.Сер.Геометрия.Тамбов,1971.Вып.3.С.109-125.

3. W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd.2. Affine Differentialgeometrie, Berlin, 1923. 259p.

4. Н о р д е н А.П. Теория поверхностей.М.,1956.259с.

5. К а м е н с к и й Н.П., Р у с к о л Д.Е. К вопросу определения минимальной поверхности заданием метрики и векторного поля специального вида// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1973. Вып.3.С.20-27.

6. К а м е н с к и й Н.П. К вопросу совпадения метрической и аффинной нормали на гиперповерхности // Изв.вузов.Математика.1963. № 3 (34). С. 52-55.

7. Р у с к о л Д.Е. Определение поверхности в трехмерном евклидовом пространстве заданием 2-й и 4-й основных квадратичных форм // Уч.зап./ Калининградский ун-т. Калининград. 1969. Вып.I.

8. Р у с к о л Д.Е. К вопросу определения поверхности в трехмерном евклидовом пространстве заданием метрического тензора и средней кривизны // Тр.семинара по векторному и тензорн.анализу.М.,1963.Вып.12.