ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ЛИНИИ КРИВИЗНЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В РИМАНОВОМ И ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Г.В. Криворучко

1. Со всяким векторным полем A^i в римановом пространстве V_n и псевдоримановом пространстве ${}^lV_n$ [1,с.394] связаны тензорные поля

$$\mathcal{D}^i_j = \nabla_j A^i, \quad \mathcal{D}^{ij} = g^{ki}\mathcal{D}^j_k, \quad i,j,k = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где ∇_j -ковариантная производная в пространствах ${}^lV_n$ или V_n ,и тензорные поля

$$E^{ij} = \mathcal{D}^{(ij)}, \quad F^{ij} = \mathcal{D}^{[ij]}, \tag{2}$$

полученные симметрированием и альтернированием тензоров $\mathcal{D}^{ij}$,а также тензорные поля

$$E^i_j = g_{jk}E^{ki}, \quad F^i_j = g_{jk}F^{ki}, \tag{3}$$

где g_{ij} -метрический тензор пространства V_n или ${}^lV_n$. Поэтому со всяким векторным полем A^i в пространствах V_n и ${}^lV_n$ связаны векторные поля собственных векторов аффиноров E^i_j, $\mathcal{D}^i_j$, F^i_j. Будем называть линии пространств V_n и ${}^lV_n$,касающиеся в каждой своей точке этих векторов,определенных в этой точке,линиями кривизны соответственно I,II и III рода.В случае риманова пространства V_n все ненулевые собственные векторы тензора F^i_j мнимы,и,следовательно,линии кривизны III рода,соответствующие ненулевым собственным числам матрицы (F^i_j) ,мнимы.В случае,когда риманово пространство V_n является евклидовым пространством E_n,а векторное поле A^i состоит из единичных векторов,задание этого векторного поля равносильно заданию гиперраспределения Δ_{n-1},при котором всякой точке ставится в соответствие гиперплоскость $g_{ij}A^i(x^j - x^j)=0$,тогда определенные нами линии кривизны I и II рода совпадают с линиями кривизны I и II рода гиперраспределения [2,с.160-161].

В пространстве E^3 роль оператора ∇_j играет оператор $\nabla = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x^i}$,с помощью которого определяются дивергенция векторного поля $\vec{A} = \{A^i\}$, $div\vec{A} = \nabla\vec{A} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ и ротор этого поля $rot\vec{A} = [\vec{\nabla}\vec{A}]$. Так как роль векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$ пространства E_3 в пространстве E_n играет внешнее произведение $\vec{a}\wedge\vec{b}$,являющееся уже не вектором,а кососимметрическим аффинором,то тензор F^i_j можно рассматривать как обобщение ротора векторного поля пространства E_n.Поэтому будем называть этот тензор ротором векторного поля A^i пространств V_n и ${}^lV_n$; тензор E^i_j будем называть тензором этого векторного поля (след E^i_i этого тензора можно назвать дивергенцией этого поля).

При нечетном n $det(F^i_j)=0$ тензор F^i_j обладает собственным вектором,соответствующим нулевому собственному числу.В случае пространства E_3 направление этого вектора совпадает с направлением вектора $rot\vec{A}$ и линия,касающаяся в каждой своей точке вектора $rot\vec{A}$ называется вихревой линией поля [3,с.252]. Поэтому будем называть линии кривизны III рода векторного пространства V_n и ${}^lV_n$,соответствущие нулевым собственным числам матрицы (F^i_j),вихревыми линиями векторного поля.

2. Классификация различных случаев линий кривизны I,II и III рода сводится к классификации канонических форм,к которым приводятся матрицы (E^i_j),$(\mathcal{D}^i_j)$, (F^i_j). Собственные векторы аффинора E^i_j в случае пространства V_n взаимно ортогональны,а в случае пространства ${}^lV_n$ эти векторы взаимно ортогональны только тогда,когда квадрики $g_{ij}x^i x^j = 0$ и $E_{ij}x^i x^j = 0$ в бесконечно удаленной гиперплоскости касательного пространства ${}^lE_n$ пространства ${}^lV_n$ не касаются друг друга.Имеются многочислен-

ные случаи взаимного касания квадрик, в частности, в случае пространства ${}^1V_3$ имеются 12 случаев, соответствующих различным случаям касания коник на плоскости [1, с.178-183]. В случае пространства V_n собственные векторы аффинора F^i_j, соответствующие его ненулевым собственным числам, попарно мнимо сопряжены, причем 2-плоскости мнимо сопряженных собственных векторов вполне ортогональны. В бесконечно удаленной гиперплоскости касательного пространства E_n пространства V_n, являющейся эллиптическим пространством S_{n-1}, эти 2-плоскости высекают прямые векторов канонический системы скользящих векторов пространства S_{n-1} [4, с.332-333], а бесконечно удаленные точки собственных векторов этого аффинора, соответствующие ненулевым собственным числам, являются точками пересечения этих прямых с абсолютом пространства S_{n-1}. В случае пространства ${}^lV_n$ ненулевые собственные векторы аффинора F^i_j также определяются векторами канонической системы скользящих векторов в бесконечно удаленной гиперплоскости касательного пространства ${}^lE_n$ пространства ${}^lV_n$, являющейся гиперповерхностью пространства ${}^lS_n$ [5], причем бесконечно удаленные точки собственных векторов этого аффинора являются вещественными или мнимо сопряженными точками пересечения этих прямых с абсолютом пространства ${}^lS_{n-1}$.

3. В качестве примера рассмотрим поле вектора - потенциала A^i электромагнитного поля в пространстве-времени теории относительности, являющегося пространством ${}^1V_4$. Кососимметрический тензор F^{ij} электромагнитного поля связан с векторами $E=\{E^i\}$ и $H=\{H^i\}$ напряженности электрического и магнитного полей соотношениями $F^{ij}=-F^{ji}=H^k$ (i,j,k - четная подстановка чисел 1, 2, 3) и $F^{4i}=-F^{i4}=cE^i$ (c-скорость света), определяемыми вектором A^i по формулам (2), (3). Собственные векторы аффинора F^i_j, два из которых вещественные, а два - мнимо сопряжены, составляют так называемую световую тетраду [6].

Рассмотренные нами линии кривизны III рода векторного поля A^i можно определить как линии, касающиеся в каждой своей точке векторов световой тетрады. Линии кривизны I и II рода векторного поля A^i также инвариантно связаны с этим полем.

Библиографический список

1. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы пространства. М.; Наука, 1969.

2. С и н ц о в Д.М. Работы по неголономной геометрии. Киев, 1972.

3. Л а м б Г. Гидродинамика. М.; Л., 1947.

4. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.

5. Н а в я ж с к и й Ф.М. Скользящие векторы в неевклидовых пространствах: Уч.зап./МГПИ им.В.И. Ленина.- М., 1977. Т.2, № 401. С.68-80.

6. Ф р о л о в В.П. Метод Ньюмана-Пенроуза в общей теории относительности: Тр.физ. ин-та им.П.Н.Лебедева/АН СССР, 1977. Т.96. С.72-180.