ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.3
1973

Л И П А Т О В А Ф.А.

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР ФИГУР, ОБРАЗОВАННЫХ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассматривается двупараметрическое семейство T (конгруэнция пар фигур [I] C, M, где C -эллипс, а M -точка, не инцидентная плоскости эллипса, причем: I) многообразие (M) описанное точкой M образует линию, 2) характеристическая точка A_1 плоскости эллипса лежит на эллипсе. Общий случай, когда (M) - поверхность, рассмотрен в [2], [3].

Поместим начало A репера $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ в центр эллипса C, конец вектора $\bar{e}_1$ в точку A_1, конец вектора $\bar{e}_3$ в точку M, конец вектора $\bar{e}_2$ в точку A_2 эллипса так, чтобы диаметры AA_1 и AA_2 были сопряженными.

Тогда система пфаффовых и конечных уравнений пары T примет вид:

$$
\begin{gathered}
\omega^3=a\omega^1+b\omega^2,\ \ \omega_1^2=c\omega^1+f\omega^2,\ \ \omega_2^1=l\omega^1+h\omega^2,\\
\omega_1^3=-a\omega^1-b\omega^2,\ \ \omega_2^3=\rho\omega^1+\kappa\omega^2,\ \ \omega_3^3=s\omega^1+t\omega^2,\\
\omega_1^1=\eta\omega^1+\alpha\omega^2,\ \ \omega_2^2=\beta\omega^1+\gamma\omega^2,\ \ \omega_3^2=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\\
\omega_3^1=q\omega^1+r\omega^2,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
(1+q)(1+m_2)-r m_1=0,\\
(1+q)(b+t)-r(a+s)=0,\\
a\alpha+c\kappa-f\rho-b(1+\eta)-\rho=0,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где ω^i, ω_i^α -компоненты деривационных формул репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства:

$$
\mathcal{D}\omega^i=\omega^k\wedge\omega_k^i,\ \ \mathcal{D}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j\quad(i,j,k=1,2,3).
\tag{3}
$$

Анализируя системы уравнений (I), (2) убеждаемся, что пары существуют и определяются с произволом шести функций двух аргументов.

Уравнения эллипса C относительно репера R имеют вид:

$$
(x^1)^2+(x^2)^2=1,\quad x^3=0.
\tag{4}
$$

Рассмотрим два подкласса пар T:

О п р е д е л е н и е. Пара T называется парой T', если

$$
b=\rho=\alpha=\kappa=r=h=\gamma=t=l=0,\ q=-1,\ a=-s.
\tag{5}
$$

Т е о р е м а I. Пара T' существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений (I) в силу условий (5) примет вид:

$$
\begin{gathered}
\omega^3=a\omega^1,\ \ \omega_1^2=c\omega^1+f\omega^2,\ \ \omega_2^1=0,\\
\omega_1^3=-a\omega^1,\ \ \omega_2^3=0,\ \ \omega_3^3=-a\omega^1,\ \ \omega_1^1=\eta\omega^1,\\
\omega_2^2=\beta\omega^1,\ \ \omega_3^2=m_1\omega^1+m_2\omega^2,\ \ \omega_3^1=-\omega^1.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Замыкая систему (6), получим пять квадратичных уравнений:

$$da\wedge\omega^1=0,\quad d\eta\wedge\omega^1=0,\quad d\beta\wedge\omega^1=0.$$

$$dc\wedge\omega^1+df\wedge\omega^2+[f(f+am_2-\eta)+am_2]\,\omega^1\wedge\omega^2=0, \qquad (7)$$

$$dm_1\wedge\omega^1+dm_2\wedge\omega^2+[f(m_2+1)+am_2(a+1)]\,\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

Из систем уравнений (6) и (7) видим, что пара T' определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Точки $A_1(1,0,0)$, $A_1^*(-1,0,0)$ являются фокальными точками эллипса C пары T', причем A_1 – строенная фокальная точка. Остальные две фокальные точки эллипса C симметричны относительно диаметра $A_1A_1^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения фокусов имеем систему уравнений:

$$(x^1)^2+(x^2)^2=1,\quad x^3=0, \qquad (8)$$

$$x^2(1-x^1)(fx^1+1)=0.$$

Откуда следует, что фокальными точками эллипса C являются строенная точка A_1, и точки A_1^*, $F_1\left(-\frac{1}{f},\sqrt{\frac{f^2-1}{f^2}};0\right)$, $F_2\left(-\frac{1}{f};-\sqrt{\frac{f^2-1}{f^2}};0\right)$

Т е о р е м а 3. Поверхность (A) пары T' является торсом. Вдоль направлений $\omega^1=0$ коники конгруэнции (C) инцидентны одной плоскости.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A) пары T' имеет вид: $(\omega^1)^2=0$, следовательно поверхность (A) – торс.

Так как $dx^3\equiv 0 \pmod{\omega^1}$, то при $\omega^1=0$ коники конгруэнции (C) лежат в одной плоскости.

О п р е д е л е н и е. Пара T называется парой T'',

если

$$m_1=b=p=\alpha=c=t=s=a=f=\beta=0,\quad m_2=-1. \qquad (9)$$

Т е о р е м а 4. Пара T'' существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутая система уравнений, определяющая пару T'' состоит из конечных уравнений (9), пфаффовых уравнений:

$$\omega^3=0,\quad \omega_1^2=0,\quad \omega_1^3=0,\quad \omega_3^3=0,$$

$$\omega_2^1=e\omega^1+h\omega^2,\quad \omega_3^1=q\omega^1+r\omega^2,\quad \omega_2^3=k\omega^2, \qquad (10)$$

$$\omega_1^1=\eta\omega^1,\quad \omega_2^2=\gamma\omega^2,\quad \omega_3^2=-\omega^2$$

и внешних уравнений

$$d\ell\wedge\omega^1+dh\wedge\omega^2-(\ell^2+h\eta+\ell\gamma+kq)\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$dk\wedge\omega^2=0,\quad d\eta\wedge\omega^1=0,$$

$$d\gamma\wedge\omega^2+kq\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$

$$dq\wedge\omega^1+dr\wedge\omega^2+(r\eta-e-eq)\,\omega^1\wedge\omega^2=0.$$

Эта система – в инволюции и имеет решение с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 5. Точки пересечения диаметров AA_1, AA_2 с эллипсом C являются фокальными точками эллипса C, остальные два фокуса определяются точками F_5, F_6, где

$$F_5\left(-\frac{\eta+e\sqrt{e^2+\eta^2-1}}{e^2+\eta^2};\ -\frac{e+\sqrt{\eta^2(e^2+\eta^2-1)}}{e^2+\eta^2};\ 0\right),$$

$$F_6\left(-\frac{\eta-e\sqrt{e^2+\eta^2-1}}{e^2+\eta^2};\ -\frac{e-\sqrt{\eta(e^2+\eta^2-1)}}{e^2+\eta^2};\ 0\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения координат фокусов имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^1)^2+(x^2)^2=1, \quad x^3=0, \\ x^1x^2(x^1\eta+ex^2+1)=0. \end{cases} \tag{12}$$

Из (I2) непосредственно следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 6. Поверхность (A) пары T'' является торсом, её касательная плоскость совпадает с плоскостью эллипса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (A) пары T'' принимает вид: $(\omega^2)^2=0$. Следовательно, поверхность (A) -торс. Так как $(d\bar{A}\,\bar{e},\bar{e}_2)=0$, то плоскость эллипса C является касательной плоскостью.

Л и т е р а т у р а

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. Труды геом. семинара № 2 Москва, I969.

2. Липатова Ф.А., Конгруэнции пар фигур в трехмерном аффинном пространстве, образованные эллипсом и точкой. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. I, Тр. Калининградского ун-та,

3. Липатова Ф.А., Об одном классе конгруэнций пар фигур, порожденных эллипсом и точкой. Тр. Калининградского ун-та, вып. 2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

М А Л А Х О В С К И Й В.С.

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются вырожденные многообразия пар фигур. Дана классификация вырожденных конгруэнций линейных и квадратичных пар. Исследованы вырожденные пары конгруэнций, порожденные точками.

§ I. Общая характеристика вырожденных пар фигур.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 m-мерное многообразие простых неинцидентных пар фигур $F=[F_1,F_2]$ где $m<\min(N_1,N_2)$, N_i $(i=1,2)$ -ранг фигуры F_i (см. I, §8). Обозначим буквой h_i размерность многообразия (F_i), образованного фигурой F_i. Не умаляя общности, можно считать, что

$$h_1 \geq h_2 \tag{1.1}$$

О п р е д е л е н и е I. Многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется невырожденным, если $h_1=h_2=m$, многообразие $\mathfrak{M}_m$ называется вы-