4. *Столяров А. В.* Замечания к применению в научных исследованиях дифференциалов обобщенных символов Кронекера //Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 36. Калининград, 2010. С.144—145.

5. *Шевченко Ю. И.* Нормальная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 39. Калининград, 2008. С. 157—166.

6. *Шевченко Ю. И.* Плоскостная аффинная связность Столярова, ассоциированная с распределением. // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 40. Калининград, 2009. С.152—160.

7. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве: учебное пособие. Калининград, 2009.

8. *Шевченко Ю. И.* Проективная связность Лаптева — Остиану, ассоциированная с распределением плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 41. Калининград, 2010. С. 150—165.

V. Malakhovsky

ABOUT MISTAKES IN PRINCIPLE BYUSING GENERALIZED KRONECKER SYMBOLS IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

Two mistakes in principle in scientific works using generalized Kronecker symbols and its covariant differentials are analyzed.

УДК 514.75

К. В. Петешов

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ДЕЙСТВИЕ ТЕНЗОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПОДОБЪЕКТАХ

В проективном пространстве рассмотрены дифференциальные уравнения компонент символа Кронекера и дифференциальные сравнения для компонент квазитензора, задающего оснащение Бортолотти поверхности. Произведено неформальное разбиение этих уравнений и сравнений при подробной записи — без использования тензорного дифференциального оператора. Показано, что формальное разбиение в сжатой записи (с применением тензорного оператора) производить, вообще говоря, нельзя.

Ключевые слова: символ Кронекера, подсимволы Кронекера, оснащение Бортолотти, квазитензор.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I,J,...=\overline{1,n};\ i,j,...=\overline{1,m};\ \alpha,\beta,...=\overline{m+1,n}.$$

Проективное пространство P_n отнесем к подвижному реперу $R=\left\{A,A_I\right\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\qquad dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A,$$

где форма θ играет роль множителя пропорциональности, а базисные формы $\omega^I,\omega_I^J,\omega_I$ проективной группы *GP(n)*, действующей в пространстве P_n, удовлетворяют структурным уравнениям (см., напр., [1, с. 173])

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\quad D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J,$$
$$D\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I+d_J^I\omega_K\wedge\omega^K+\omega_J\wedge\omega^I.$$

Пусть оператор Δ действует по закону

$$\Delta T_{iJ}^{\alpha}=dT_{iJ}^{\alpha}-T_{iK}^{\alpha}\omega_J^K-T_{jJ}^{\alpha}\omega_i^j+T_{iJ}^{\beta}\omega_\beta^\alpha.$$

§1. Символ Кронекера и его подсимволы

Символ Кронекера δ_J^I можно трактовать как набор констант

$$\delta_J^I=\begin{cases}1,\text{если } I=J,\\ 0,\text{ если } I\neq J,\end{cases}$$

которые образуют один раз ковариантный и один раз контравариантный тензор.

Действительно, компоненты символа Кронекера δ^I_J удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\delta^I_J = 0, \qquad (1.1)$$

которые проверяются непосредственно:

$$\Delta\delta^I_J = d\delta^I_J + \delta^K_J \omega^I_K - \delta^I_K \omega^K_J = 0 + \omega^I_J - \omega^I_J = 0.$$

Значит, расписывая действие оператора Δ в уравнениях (1.1), имеем

$$d\delta^I_J + \delta^K_J \omega^I_K - \delta^I_K \omega^K_J = 0. \qquad (1.1')$$

Найдем дифференциальные уравнения для подсимволов Кронекера $\delta^i_J, \delta^\alpha_J$ в пространстве P_n. Выполним разбиение значений индекса $I=(i,\alpha)$ в равенствах (1.1'). При $I=\overline{1,m}$, т. е. в том случае, когда индекс I пробегает значения i, имеем

$$d\delta^i_J + \delta^K_J \omega^i_K - \delta^i_K \omega^K_J = 0.$$

Распишем сокращенное суммирование во втором слагаемом

$$d\delta^i_J + \delta^k_J \omega^i_k + \delta^\alpha_J \omega^i_\alpha - \delta^i_K \omega^K_J = 0.$$

Используя оператор Δ

$$\Delta\delta^i_J = d\delta^i_J - \delta^i_K \omega^K_J + \delta^k_J \omega^i_k,$$

получим

$$\Delta\delta^i_J + \delta^\alpha_J \omega^i_\alpha = 0. \qquad (1.2)$$

Аналогично при $I=\overline{m+1,n}$, т. е. в том случае, когда индекс I пробегает значения индекса α, имеем

$$d\delta^\alpha_J + \delta^K_J \omega^\alpha_K - \delta^\alpha_K \omega^K_J = 0.$$

Распишем сокращенное суммирование во втором слагаемом:

$$d\delta^\alpha_J + \delta^i_J \omega^\alpha_i + \delta^\beta_J \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_K \omega^K_J = 0.$$

Используем оператор Δ:

$$\Delta\delta_J^\alpha = d\delta_J^\alpha - \delta_K^\alpha \omega_J^K + \delta_J^\beta \omega_\beta^\alpha,$$

тогда

$$\Delta\delta_J^\alpha + \delta_J^i \omega_i^\alpha = 0. \tag{1.3}$$

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. *В проективном пространстве* P_n *подсимволы Кронекера* δ_J^i, δ_J^α *удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (1.2, 1.3), *т. е. являются квазитензорами, составляющими в совокупности тензор Кронекера* δ_J^I.

Вывод 1. *Формально разбивать значения индекса I под тензорным оператором* Δ *в дифференциальных уравнениях* (1.1) *компонент символа Кронекера* δ_J^I *нельзя.*

§2. Оснащенная по Бортолотти поверхность

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную поверхность X_m ($1 \le m < n$) как m-параметрическое семейство касательных плоскостей. Совмещая вершину A репера с точкой касания и помещая вершины A_i на касательную плоскость T_m к поверхности X_m в точке A, получаем [3] уравнения поверхности X_m в репере первого порядка $R^1 = \{A, A_i, A_\alpha\}$

$$\omega^\alpha = 0, \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j. \tag{2.1}$$

Определение. *Оснащением Бортолотти [2] поверхности* X_m *проективного пространства* P_n *называется присоединение к каждой ее точке A гиперплоскости* P_{n-1}, *не проходящей через нее, т. е.* $P_{n-1} \oplus A = P_n$.

Гиперплоскость Бортолотти задается совокупностью точек

$$B_I = A_I + \mu_I A,$$

где коэффициенты μ_I удовлетворяют следующим сравнениям по модулю базисных форм ω^j

$$\Delta\mu_I + \omega_I \equiv 0. \qquad (2.2)$$

Так как $\Delta\mu_I = d\mu_I - \mu_J\omega_I^J$, то

$$d\mu_I - \mu_J\omega_I^J + \omega_I \equiv 0. \qquad (2.2')$$

Учитывая, что $J=(j,\alpha)$, получим развернутый вид формулы

$$d\mu_I - \mu_j\omega_I^j - \mu_\alpha\omega_I^\alpha + \omega_I \equiv 0. \qquad (2.3)$$

Выполним формальное разбиение индекса $I = (i,\alpha)$ в формуле (2.2) без учета того, как действует оператор Δ. При $I=\overline{1,m}$, т.е. когда индекс I пробегает значения индекса i и при $I=\overline{m+1,n}$ получим

$$\Delta\mu_i + \omega_i \equiv 0, \ \Delta\mu_\alpha + \omega_\alpha \equiv 0. \qquad (2.4)$$

Выполним неформальное разбиение индекса I не в краткой записи (2.2), а в подробной записи (2.3) с учетом (2.1_2). При $I = i$ имеем

$$d\mu_i - \mu_j\omega_i^j - \mu_\alpha\omega_i^\alpha + \omega_i \equiv 0.$$

Так как $\Delta\mu_i = d\mu_i - \mu_j\omega_i^j$, то

$$\Delta\mu_i - \mu_\alpha\Lambda_{ij}^\alpha\omega^j + \omega_i \equiv 0,$$

что эквивалентно сравнениям (2.4_1), так как слагаемое с базисными формами ω^j можно опустить. При $I = \alpha$ из сравнений (2.3) получим

$$d\mu_\alpha - \mu_j\omega_\alpha^j - \mu_\beta\omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha \equiv 0.$$

Используя оператор $\Delta\mu_\alpha = d\mu_\alpha - \mu_\beta\omega_\alpha^\beta$, запишем последние сравнения короче

$$\Delta\mu_\alpha - \mu_i\omega_\alpha^i + \omega_\alpha \equiv 0,$$

что не совпадает со сравнениями (2.4_2).

Итак, имеем

$$\Delta\mu_i + \omega_i \equiv 0,\ \Delta\mu_\alpha - \mu_i\omega_\alpha^i + \omega_\alpha \equiv 0. \qquad (2.5)$$

Утверждение 2. *Сопоставляя* (2.4) *и* (2.5)*, видим, что при формальном разбиении значений индекса I под оператором* Δ *получаем сравнения, лишь частично совпадающие со сравнениями, найденными неформальным путем.*

Вывод 2. *Формально разбивать значения индекса под оператором* Δ *в дифференциальных сравнениях* (2.2) *квазитензора* μ_I*, задающего оснащающую гиперплоскость Бортолотти для точки A поверхности* X_m*, вообще говоря, нельзя.*

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии / пер. с англ. М., 1986.
2. *Столяров А.В.* Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. 1977. № 8. С. 25—46.
3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий: учебное пособие. Калининград, 2000.

K. Peteshov

SUBOBJECTS MANIPULATIONS OF THE TENSOR DIFFERENTIAL OPERATOR

Differential equations of the components of the Kronecker delta and differential comparisons of the quasi-tensor components defining the Bortolotti's clothing of surface are viewed in the projective surface. The informal partition of these equations and comparisons is performed by a detailed listning — without the use of the tensor differential operator.

It is proved that a formal partition by the contracted listning (with the use of a tensor operator) is impossible to carry out.