УДК 514.75

О. О. Белова

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

ПУЧОК СВЯЗНОСТЕЙ 1-го ТИПА, ИНДУЦИРОВАННЫЙ АНАЛОГОМ СИЛЬНОЙ НОРМАЛИЗАЦИИ НОРДЕНА ГРАССМАНОПОДОБНОГО МНОГООБРАЗИЯ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

В проективном пространстве рассмотрено грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей. В главном расслоении задана фундаментально-групповая связность. Доказано, что аналог сильной нормализации Нордена индуцирует пучок связностей 1-го типа.

Ключевые слова: грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, проективное пространство, связность, нормализация Нордена.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, ...=\overline{1, n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами [1]

$$dA=\theta A+\omega^I A_I\,,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A\,,$$

причем формы Пфаффа $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана для проективной группы $GP(n)$:

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\ \ D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J,$$
$$D\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I+\delta_J^I\omega_K\wedge\omega^K+\omega_J\wedge\omega^I.$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ [2] центрированных m-мерных плоскостей L_m^*. При помещении вершин A, A_a на плоскость L_m^* и фиксации центра A $(a, ...=\overline{1, m}\,; \alpha, ...=\overline{m+1, n})$ уравнения грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей выглядят следующим образом:

$$\omega^a = \Lambda^a_\alpha \omega^\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega^\alpha_b ,$$

где $\Lambda = \{ \Lambda^a_\alpha , \Lambda^{ab}_\alpha \}$ — фундаментальный объект 1-го порядка многообразия $V^* = Gr^*(m,n)$, причем

$$\Delta\Lambda^a_\alpha + \Lambda^{ab}_\alpha \omega_b + \omega^a_\alpha \equiv 0 , \ \Delta\Lambda^{ab}_\alpha \equiv 0 .$$

Групповая связность в главном расслоении $G^*(V^*)$, возникающем над многообразием V^*, задается способом Г. Ф. Лаптева [3] с помощью форм:

$$\tilde{\omega}^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{b\alpha}\omega^\alpha - L^{ac}_{b\alpha}\omega^\alpha_c , \ \tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\gamma_a ,$$

$$\tilde{\omega}^a_\alpha = \omega^a_\alpha - \Gamma^a_{\alpha\beta}\omega^\beta - L^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b , \ \tilde{\omega}_a = \omega_a - L_{a\alpha}\omega^\alpha - \Pi^b_{a\alpha}\omega^\alpha_b ,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - L_{\alpha\beta}\omega^\beta - \Pi^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a ,$$

где $\Gamma = \{ \Gamma^a_{b\alpha}, L^{ac}_{b\alpha}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, L^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \Gamma^a_{\alpha\beta}, L^{ab}_{\alpha\beta}, L_{a\alpha}, \Pi^b_{a\alpha}, L_{\alpha\beta}, \Pi^a_{\alpha\beta} \}$ — объект групповой связности, компоненты которого удовлетворяют сравнениям, найденным в статье [2].

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [4] данного многообразия полями следующих геометрических образов: (n–m–1)-плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m, и (m–1)-плоскостью P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр. Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$.

Преобразуем дифференциалы точек B_a, B_α, подставляя вместо дифференциалов компонент оснащающего квазитензора $\lambda = \{ \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_a \}$ их выражения через ковариантные дифференциалы [5]:

$$\nabla\lambda^a_\alpha = d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha \tilde{\omega}^a_b - \lambda^a_\beta \tilde{\omega}^\beta_\alpha + \tilde{\omega}^a_\alpha ,$$

$$\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha \tilde{\omega}_a - \lambda_\beta \tilde{\omega}^\beta_\alpha + \tilde{\omega}_\alpha , \quad \nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b \tilde{\omega}^b_a + \tilde{\omega}_a .$$

Тогда

$$dB_a = (...)_a^b B_b + (...)_a^\alpha B_\alpha + (\nabla\lambda_a + l_{a\alpha}\omega^\alpha + l_{a\alpha}^b\omega_b^\alpha)A,$$
$$dB_\alpha = (...)_\alpha^\beta B_\beta + (\nabla\lambda_\alpha^a + l_{\alpha\beta}^a\omega^\beta + l_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta)A_a +$$
$$+(\nabla\lambda_\alpha + l_{\alpha\beta}\omega^\beta + m_{\alpha\beta}^a\omega_a^\beta)A,$$

где

$$\begin{aligned}
l_{a\alpha} &= L_{a\alpha} - \lambda_b\Gamma_{a\alpha}^b - \lambda_a\lambda_b\Lambda_\alpha^b - \lambda_a\lambda_\alpha + \lambda_a\lambda_b\lambda_\alpha^b,\\
l_{a\alpha}^b &= \Pi_{a\alpha}^b - \lambda_c L_{a\alpha}^{cb} - \lambda_a\lambda_c\Lambda_\alpha^{cb} - \delta_a^b\lambda_\alpha + \delta_a^b\lambda_c\lambda_\alpha^c,\\
l_{\alpha\beta}^a &= \Gamma_{\alpha\beta}^a + \lambda_\alpha\Lambda_\beta^a - \lambda_\gamma^a\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \lambda_\alpha\lambda_\beta^a + \lambda_\alpha^b\Gamma_{b\beta}^a,\\
l_{\alpha\beta}^{ab} &= L_{\alpha\beta}^{ab} + \lambda_\alpha\Lambda_\beta^{ab} - \lambda_\gamma^a L_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \lambda_\alpha^b\lambda_\beta^a + \lambda_\alpha^c L_{c\beta}^{ab},\\
l_{\alpha\beta} &= L_{\alpha\beta} - \lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \lambda_\alpha\lambda_\beta + \lambda_\alpha^a L_{a\beta},\\
m_{\alpha\beta}^a &= \Pi_{\alpha\beta}^a - \lambda_\gamma L_{\alpha\beta}^{\gamma a} - \lambda_\alpha^a\lambda_\beta + \lambda_\alpha^b\Pi_{b\beta}^a.
\end{aligned} \tag{1}$$

Дифференцируя величины (1), находим сравнения

$$\Delta l_{a\alpha} + l_{a\alpha}^b\omega_b \equiv 0,\ \Delta l_{a\alpha}^b \equiv 0,\ \Delta l_{\alpha\beta}^a + l_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b \equiv 0,\ \Delta l_{\alpha\beta}^{ab} \equiv 0,$$
$$\Delta l_{\alpha\beta} + (l_{\alpha\beta}^a + m_{\alpha\beta}^a)\omega_a \equiv 0,\ \Delta m_{\alpha\beta}^a + l_{\alpha\beta}^{ba}\omega_b \equiv 0,$$

то есть объект $l = \{l_{a\alpha}, l_{a\alpha}^b, l_{\alpha\beta}^a, l_{\alpha\beta}^{ab}, l_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}^a\}$ является тензором.

Приравнивая компоненты тензора l нулю, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{L}_{a\alpha} &= \lambda_b\Gamma_{a\alpha}^b + \lambda_a\lambda_b\Lambda_\alpha^b + \lambda_a\lambda_\alpha - \lambda_a\lambda_b\lambda_\alpha^b,\\
\overset{1}{\Pi}{}_{a\alpha}^b &= \lambda_c L_{a\alpha}^{cb} + \lambda_a\lambda_c\Lambda_\alpha^{cb} + \delta_a^b\lambda_\alpha - \delta_a^b\lambda_c\lambda_\alpha^c,\\
\overset{1}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}^a &= -\lambda_\alpha\Lambda_\beta^a + \lambda_\gamma^a\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \lambda_\alpha\lambda_\beta^a - \lambda_\alpha^b\Gamma_{b\beta}^a,\\
\overset{1}{L}{}_{\alpha\beta}^{ab} &= -\lambda_\alpha\Lambda_\beta^{ab} + \lambda_\gamma^a L_{\alpha\beta}^{\gamma b} + \lambda_\alpha^b\lambda_\beta^a - \lambda_\alpha^c L_{c\beta}^{ab},\\
\overset{1}{L}_{\alpha\beta} &= \lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \lambda_\alpha\lambda_\beta - \lambda_\alpha^a(\lambda_b\Gamma_{a\beta}^b + \lambda_a\lambda_b\Lambda_\beta^b + \lambda_a\lambda_\beta - \lambda_a\lambda_b\lambda_\beta^b),\\
\overset{1}{\Pi}{}_{\alpha\beta}^a &= \lambda_\gamma L_{\alpha\beta}^{\gamma a} + \lambda_\alpha^a\lambda_\beta - \lambda_\alpha^b(\lambda_c L_{b\beta}^{ca} + \lambda_b\lambda_c\Lambda_\beta^{ca} + \delta_b^a\lambda_\beta - \delta_b^a\lambda_c\lambda_\beta^c).
\end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, групповая связность Г может быть сведена к подсвязности

$$\Gamma_1 = \{ \Gamma^a_{b\alpha}, L^{ac}_{b\alpha}, \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, L^{\alpha a}_{\beta\gamma} \},$$

значит, возникает $\{(n-m)(m+1)(m^2+(n-m)^2)\}$-параметрический пучок групповых связностей 1-го типа.

Теорема. *Аналог сильной нормализации Нордена грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей индуцирует пучок* $\overset{1}{\Gamma}$ *групповых связностей 1-го типа.*

Следствие. *Аналог нормализации Нордена грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей индуцирует связность 1-го типа* $\overset{01}{\Gamma}$.

Доказательство. Для выделения в пучке групповых связностей 1-го типа $\overset{1}{\Gamma}$ единственной подсвязности $\overset{01}{\Gamma}$ подставим в равенства (2) выражения компонент объекта $\overset{0}{\Gamma}_1 = \{ \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{L}{}^{ac}_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{L}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} \}$ и получим формулы для компонент объекта связности 1-го типа $\overset{01}{\Gamma}$, причем они совпадут (см. [2]) с выражениями:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha} = -\delta^a_b \lambda_\alpha + (\lambda^a_\alpha - \Lambda^a_\alpha)\lambda_b + \delta^a_b(\lambda^c_\alpha - \Lambda^c_\alpha)\lambda_c,$$

$$\overset{0}{L}{}^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b \lambda^a_\alpha - (\delta^a_b \Lambda^{ec}_\alpha + \delta^e_b \Lambda^{ac}_\alpha)\lambda_e,$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma \lambda_\beta - \delta^\alpha_\beta \lambda_\gamma + \delta^\alpha_\beta(\lambda^a_\gamma - \Lambda^a_\gamma)\lambda_a, \quad \overset{0}{L}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\delta^\alpha_\gamma \lambda^a_\beta - \delta^\alpha_\beta \Lambda^{ba}_\gamma \lambda_b;$$

$$\overset{01}{L}{}_{a\alpha} = \lambda_a \lambda_b(\lambda^b_\alpha - \Lambda^b_\alpha), \quad \overset{01}{\Pi}{}^b_{a\alpha} = \delta^b_a \lambda_\alpha - \Lambda^{cb}_\alpha \lambda_a \lambda_c,$$

$$\overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha \Lambda^a_\beta - (\lambda^a_\beta - \Lambda^a_\beta)\lambda_b \lambda^b_\alpha,$$

$$\overset{01}{L}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha \Lambda^{ab}_\beta + \Lambda^{ab}_\beta \lambda^c_\alpha \lambda_c - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha,$$

$$\overset{01}{L}{}_{\alpha\beta} = -\lambda_\alpha \lambda_\beta + \lambda_a \lambda_\alpha(\lambda^a_\beta - \Lambda^a_\beta) - \lambda_a \lambda_b \lambda^b_\alpha(\lambda^a_\beta - \Lambda^a_\beta),$$

$$\overset{01}{\Pi}{}^a_{\alpha\beta} = -\Lambda^{ba}_\beta \lambda_b \lambda_\alpha - \lambda_\beta \lambda^a_\alpha + \Lambda^{ba}_\beta \lambda^c_\alpha \lambda_b \lambda_c.$$

Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* О структурных уравнениях проективной группы // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 31. Калининград, 2000. С. 93—100.

2. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Вып. 5 (52). Чебоксары, 2006. С. 18—20.

3. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. М., 1979. Т. 9.

4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Белова О. О.* Связность 2-го типа в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 38. Калининград, 2007. С. 6—12.

O. Belova

BUNCH OF CONNECTIONS OF THE 1ST TYPE INDUCED BY THE ANALOG OF NORDEN'S NORMALIZATION OF GRASSMAN-LIKE MANIFOLD OF CENTERED PLANES

Grassman-like manifold of centered planes is considered in the projective space. A fundamental-group connection is given in the principal bundle. It is proved, that analog of Norden's normalization induces bunch of connections of the 1st type.

УДК 514.75

С. Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт, Калининград)

ПОЛЯ ПЛОСКОСТЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ В НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЯХ S-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Выясняются аналитические и геометрические признаки полей плоскостей, параллельных в нормальных связностях S-распределения [1], оснащенного в смысле Нордена — Картана [1—2] и Нордена — Бортолотти [3—5].

Ключевые слова: нормальная связность, распределение, подрасслоение, поле плоскостей, оснащение.