the second and of the first order, exist two more focal surfaces (M_1), (M_2), where M_1, M_2 - are points of intersection with the quadric $Q \in N_0$ of the line, intersecting the lines $A_0 A_1$ and $A_1 A_2$ ($A_0 A_i$, $A_3 A_i$ (i = 1 , 2) - are rectilinear generatrices of the quadric Q). It is proved that the focal surface (A_3) of the congruence N_0 is double and that the focal points M_1 , M_2 harmonically divide the points of intersection of the line with the edges $A_0 A_3$ and $A_1 A_2$.

УДК 514.77

DIE TRANSFORMATION EINER GESCHLOSSENEN KURVE IN EINE ELLIPSE

W.S c h u s t e r

(Deutsches Institut für Fernstudienforschung an der Universität Tübingen)

In Schuster [3] wird gezeigt, wie man durch sukzessive Anwendung einer endlichen Folge von Parallelogramm-Konstruktionen ein beliebiges Polygon in ein affin-reguläres überführt. Ein affin-reguläres Polygon ist das Bild eines regulären Polygons unter einer affinen Abbildung. Die Vorgehensweise dabei ist folgende : Ein Polygon betrachten wir als n-tupel $\mathbf{z}=(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ komplexer Zahlen. Mit Hilfe einer Parallelogramm-Konsrtuktion P_ρ führen wir das Polygon z in ein Polygon w über. Die Parallelogramm-Konstruktion P_ρ wird durch einen reellen Streckungsfaktor $\rho \geq 0$ festgelegt : Im Eckpunkt z_j des Polygons z trägt man den Vektor $\rho\left(z_{j-1} - z_j\right) + \rho\left(z_{j+1} - z_j\right)$ an. Dessen Spitze markiert den Eckpunkt

$$w_j = z_j + \rho\left(z_{j-1} - z_j + z_{j+1} - z_j\right)$$

eines neuen Polygons $w=(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$. Diese Polygontransformation schreiben wir in der Form $w= P_\rho z$.

Satz 1. *Die Transformationen* P_{ρ_k}, $\rho_k = 1/\left(4\sin^2\dfrac{\pi k}{n}\right)$, k=2,3,...,$\frac{1}{2}\left(n-3\right)$, *führen ein beliebiges Polygon* z *mit ungerader Eckenzahl in ein affin-reguläres Polygon*

$$w = P_{\rho_2} \cdot P_{\rho_3} \cdot \ldots \cdot P_{\rho_{\frac{1}{2}(n-3)}} z$$

über. Dabei ist die Reihenfolge der Transformationen P_{ρ_k} *beliebig.*

Die Faktoren ρ_k besitzen eine geometrische Bedeutung : Die Länge der Diagonalen $\left(1,\lambda^k\right)$, $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, in dem von der n-ten Einheitswurzel λ erzeugten *regulären* n-Eck $\left(1,\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^{n-1}\right)$ ist $\left|1-\lambda^k\right| = 2\sin\frac{\pi k}{n}$.

Hat das Ausgangspolynom z *gerade* Eckenzahl, dann muß zu den Transformationen P_{ρ_k}, **k**=2,3,..., $\frac{1}{2}$(n-3), noch die Transformation S hinzutreten, die ein Polygon z in das Polygon w der Seitenmitten $w_j = \frac{1}{2}\left(z_j + z_{j+1}\right)$ überführt. S kann beim Anfangspolygon oder bei einem beliebigen Zwischenpolygon ausgeführt werden. Das Polygon $w = P_{\rho_2} \cdot P_{\rho_3} \cdot \ldots \cdot P_{\rho_{\frac{1}{2}(n-3)}} \cdot S \cdot z$ ist dann affin regulär. Das Regularisierungs-verfahren für Polygone übertragen wir auf eine Klasse hinreichend glatter geschlossener Kurven $z(t)$ der komplexen Ebene.

Durch eine periodische Funktion $z(t)$ mit $z(t)=z(t+1)$, $t \in \mathbf{R}$, werde in der komplexen Ebene eine geschlossene Kurve $z(t)$ gegeben. Wir nehmen an, daß die Funktion $z(t)$ an jeder Stelle $t \in \mathbf{R}$ in eine Taylorreihe entwickelt werden kann. Die obige Parallelogrammkonstruktion P_{ρ_k} übertragen wir auf die Kurvenpunkte $z(t)$, $z(t-\frac{1}{n})$, $z(t+\frac{1}{n})$ mit $n \in \mathbf{N}$.

Mit Hilfe der Aufsatzen [1], [2] ist Satz 2 bewiesen.

Satz 2. *Die Funktion $f(z)$ sei holomorph in einem Gebiet, das den Kreisring* $K_{e^2} = \left\{z \middle| e^{-2} \le |z| \le e^2\right\}$ *enthält und*

$$f(z) = a_o + \sum_{l \in N}\left(a_l z^l + a_{-l} z^{-l}\right)$$

sei ihre Laurentreihe. Ist dann $z(t) = f\left(e^{2\pi i t}\right)$, $t \in \mathbf{R}$, *das Bild des Einheitskreises, dann konvergiert die Funktionenfolge* $z_m(t) = (T_m z)(t)$, $m \ge 2$, *mit*

$$T_m = \prod_{k=2}^{m}\left(1 + \frac{D^2}{(2\pi k)^2}\right),\ D = \frac{d}{dt},$$

gleichmäßig für alle $t \in \mathbf{R}$ *gegen die Ellipse*

$$z_\infty(t) = a_o + \tfrac{1}{2}\left(a_1 e^{2\pi i t} + a_{-1} e^{-2\pi i t}\right).$$

Bemerkung: Es mag von einem geometrischen Standpunkt aus unbefriedigend erscheinen, daß die Transformation einer geschlossenen Kurve $z(t)$ in eine Ellipse auf eine spezielle Parametrisierung der Kurve Bezug nimmt. Die Länge der anzutagenden Normalenvektoren ändert sich dann i. allg. mit dem Kurvenpunkt. Daß die Transformation einer geschlossenen Kurve in eine Ellipse auch durch Antragen von

Normalenvektoren *gleicher* Länge möglich ist, zeigt man mit Hilfe der natürlichen Parametrisierung durch die Bogenlänge s. Die Funktion $z(s)$ hat dann die Periode L, wenn L die Länge der Kurve ist. Besitzt $z(s)$ eine Fourierentwicklung

$$z(s) = b_o + \sum_{l \in N} \left(b_l e^{\frac{2\pi\, ils}{L}} + b_{-l} e^{-\frac{2\pi\, ils}{L}} \right),$$

so transformiert die Folge der Differentialoperatoren

$$P_k = \left(1 + \frac{(LD)^2}{(2\pi k)^2} \right) = \left(1 + \frac{iLD}{2\pi k} \right)\left(1 - \frac{iLD}{2\pi k} \right)$$

die Kurve $z(s)$ in die Ellipse

$$z_\infty = b_o + \tfrac{1}{2} \left(b_1 e^{\frac{2\pi\, is}{L}} + b e^{-\frac{2\pi\, is}{L}} \right),$$

sofern $z(s)$ eine hinreichend glatte Kurve ist. Wegen $|z'(s)| = 1$ ist die Länge $L/2\pi k$ die Normalenvektoren jetzt unabhängig von dem Kurvenpunkt, an dem sie angetragen werden.

Literatur

1. Benke H., Sommer F. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1972.

2. Fritsch R. Bemerkungen zum Satz von Napoleon-Barlotti im Unterricht. In : Mathematik erfahren und lehren. Stuttgart : Ernst Klett Schulbuchverlag, 1994.

3. Schuster W. Regularisierung von Polygonen. In Vorbereitung.

В. Шустер

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ В ЭЛЛИПС

В статье [3] показывается, как через последовательное применение конечной последовательности “конструкции параллелограмм” произвольный многоугольник переводится в аффинно-регулярный. Метод регуляризации многоугольника переносится на класс достаточно гладких замкнутых кривых комплексной плоскости.