УДК 514.76

А.Я. Султанов

(Пензенский гос. пед. ун-т им. В.Г. Белинского)

О ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ С КРУЧЕНИЕМ

Пусть $A_n = (M_n, \nabla)$ – пространство аффинной связности, T – тензорное поле кручения. Рассмотрим матрицы $T^i = \left\| T^i_{\alpha\beta} \right\|, \alpha \neq i, \beta \neq i$ в координатной окрестности U с системой координат x^i $(i = 1,2,..., n)$. Если $rank(T^i(x_0)) = 2r \neq 0,\ x_0 \in U$, для некоторого индекса i, то $\dim G \leq n^2 - r(2n - 2r - 3) + 1$, где G – группа аффинных движений пространства A_n.

При изучении групп движений пространств аффинной связности с ненулевым тензорным полем кручения И. П. Егоров доказал, что размерность полных групп движений этих пространств не больше, чем $n^2 - 2n + 6$. Эта граница является точной. Примером пространства A_n, допускающего группу движений размерности $n^2 - 2n + 6$, является пространство $\boldsymbol{R}^n$, на котором линейная связность ∇ задана компонентами $\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2}, \Gamma^1_{32} = -\frac{1}{2}$, другие $\Gamma^i_{jk} = 0$ [1].

Тензорное поле кручения T порождает n матриц T^a $(a = 1,2,.., n)$ порядка $n - 1$, элементами которых являются составляющие вида $T^a_{\alpha\beta}, \alpha \neq a, \beta \neq a$. Для приведенного примера $T^a = 0$ при $a \neq 1$, а

$$T^1 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A_n = (M_n, \nabla)$ – вещественное пространство с линейной связностью ∇, $x_0 \in M_n$ и (U, x^i) – некоторая карта на M_n, причем $x_0 \in U$. Пусть T^i_{jk} - компоненты тензорного поля Т кручения связности ∇. Рассмотрим матрицы

$$T^a(x_0) = \left(T^a_{\alpha\beta}(x_0)\right) \quad (a = 1,2,..., n;\ \alpha, \beta \neq a)$$

порядка $n - 1$. Так как $T^a_{\alpha\beta} = -T^a_{\beta\alpha}$, то матрицы $T^a(x_0)$ – кососимметрические, поэтому ранги этих матриц будут четными. Предположим, что ранг $\rho(T^a(x_0))$ некоторой матрицы $T^a(x_0)$ равен $2r$ и отличен от нуля. Выясним, какой может быть размерность группы движений этого пространства.

Положим для определенности, что $\rho(T^1(x_0)) = 2\kappa \neq 0$. Перейдем в окрестности U к новой системе координат по формулам:

$$\bar{x}^1 = x^1, \quad \bar{x}^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta \quad (\alpha, \beta = 2,3,\ldots, n).$$

Пусть $\bar{T}^i_{jk}(x_0)$ – компоненты тензорного поля T в точке x_0 относительно новой системы координат. Тогда

$$\bar{T}^1_{\alpha\beta}(x_0) = T^1_{\sigma\tau}(x_0) b^\sigma_\alpha b^\tau_\beta, \tag{1}$$

где b^σ_α – элементы матрицы B, обратной матрице $A = (a^\alpha_\beta)$. Будем считать, что верхний индекс означает номер строки, нижний – номер столбца. Формулы (1) в матричной форме могут быть записаны так:

$$\bar{T}^1(x_0) = B^t T^1(x_0) B. \tag{2}$$

Существует матрица B такая, что матрица $\bar{T}^1(x_0)$ будет иметь вид [2]:

$$\bar{T}^1(x_0) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_r & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $J_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ для любого $t = 1,2,\ldots, r$. В дальнейшем будем полагать, что карта (U, x^i) выбрана так, что матрица $T^1(x_0)$ имеет вид (3).

Пусть $X = \xi^i \partial_i$ – произвольное инфинитезимальное аффинное преобразование пространства A_n. Тогда производная Ли вдоль этого векторного поля от связности ∇ равна нулю:

$$L_X \nabla = 0. \tag{4}$$

Верно и обратное: если векторное поле X на M_n удовлетворяет условию (4), то X – инфинитезимальное аффинное преобразование пространства A_n. Из (4) следует также

$$L_X T = 0. \tag{5}$$

В карте (U, x^i) уравнение (5) равносильно системе

$$\xi^m \partial_m T^i_{jk} + T\left(\begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} s \\ m \end{smallmatrix}\right) \xi^m_s = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим расслоение линейных пространств $L(M_n)$ над M_n. Соответствие, которое каждому инфинитезимальному аффинному преобразованию X из алгебры Ли $g(G)$ группы движений G пространства A_n сопоставляет значение полного лифта $X^{(0)}_{x'_0} \in T_{x'_0}(L(M_n))$ в точке x'_0 над x_0, является инъективным [3]. Выражение вектора $X^{(0)}_{x'_0}$ имеет вид:

$$X^{(0)}_{x'_0} = \xi^m(x_0)\partial^0_m + \xi^m_k(x_0) x^k_\alpha \partial^\alpha_m \qquad (m, k, \alpha = 1,2,\ldots, n).$$

Учитывая систему (6), имеем, что координаты вектора $X^{(0)}_{x'_0}$ удовлетворяют системе линейных однородных уравнений:

$$x^m A^i_{jkm} + A\binom{i}{jk}\Big|\binom{s}{m} X^m_s = 0\,, \tag{7}$$

где $A^i_{jkm} = \partial_m T^i_{jk}(x_0)$, $A\left(\begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} s \\ m \end{smallmatrix}\right) = \delta^s_j T^i_{mk}(x_0) + \delta^s_k T^i_{jm}(x_0) - \delta^i_m T^s_{jk}(x_0)$.

Из инъективности отображения $X \to X^{(0)}_{x'_0}$ следует, что $\dim g(G)$ не больше размерности пространства решений системы (7). Рассмотрим матрицу A с элементами $A\left(\begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} s \\ m \end{smallmatrix}\right)$ и пусть $\rho(A)$ – ее ранг. Если $\rho(A) \geq l$, то $\dim g(G) \leq n^2 + n - l$.

Перейдем к исследованию вопроса о размерности группы движений пространства A_n, тензорное поле кручения T которого в точке x_0 удовлетворяет условию (3):

$$\overline{T}^1_{23}(x_0) = -\overline{T}^1_{32}(x_0) = 1, \quad \overline{T}^1_{45}(x_0) = -\overline{T}^1_{54}(x_0) = 1, \ldots, \overline{T}^1_{2r,2r+1}(x_0) = -\overline{T}^1_{2r+1,2r}(x_0) = 1\,.$$

В дальнейшем черточки над T будем опускать.

Положим, что переменные a и b принимают значения 2,3,…,n; переменные p,s,t – значения 1,2,…,r; переменные i_t, j_t - значения $2t+2, \ldots, n$. Составим матрицу B из коэффициентов при неизвестных $X^a_1, X^{2t}_{j_t}, X^{2t+1}_{j_t}$ в уравнениях

$$\binom{b}{23}, \quad \binom{1}{i_t \ \ 2t+1}, \quad \binom{1}{2t \ \ i_t}, \quad \binom{1}{2p \ \ 2p+1}$$

системы (7). Из определения $A\left(\begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} s \\ m \end{smallmatrix}\right)$ имеем

$$A\left(\begin{smallmatrix} b \\ 23 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ a \end{smallmatrix}\right) = -\delta^b_a,$$

$$A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i_t \ 2t+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ a \end{smallmatrix}\right) = 0, \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i_t \ 2t+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t \end{smallmatrix}\right) = \delta^{j_t}_{i_t}, \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i_t \ 2t+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t+1 \end{smallmatrix}\right) = 0,$$

$$A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2t \ i_t \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ a \end{smallmatrix}\right) = 0, \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2t \ i_t \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t \end{smallmatrix}\right) = 0, \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2t \ i_t \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t+1 \end{smallmatrix}\right) = \delta^{j_t}_{i_t},$$

$$A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2p \ 2p+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 1 \\ a \end{smallmatrix}\right) = 0, \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2p \ 2p+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t \end{smallmatrix}\right) = \delta^{j_t}_{2p} T^1_{2t \ 2p+1} + \delta^{j_t}_{2p+1} T^1_{2p \ 2t}.$$

Из равенства (3) следует, что $T^1_{2p \ 2t} = 0$. Пусть $j_t = 2p$, тогда $2p > 2t+1$. Отсюда $2p+1-2t > 2$, поэтому из (3) следует, что $T^1_{2t \ 2p+1} = 0$. Значит, $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2p \ 2p+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t \end{smallmatrix}\right) = 0$. Аналогично из (3) следует, что $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2p \ 2p+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t+1 \end{smallmatrix}\right) = \delta^{j_t}_{2p+1} T^1_{2t \ 2p+1}$. Если $j_t = 2p+1$, то $2p+1 > 2t+1$. Отсюда $2t+1-2p < 1$, поэтому $T^1_{2p \ 2p+1} = 0$. Следовательно, $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2p \ 2p+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t+1 \end{smallmatrix}\right) = 0$.

Далее, $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2p \ 2p+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 2s \\ 2s \end{smallmatrix}\right) = \delta^s_p T^1_{2s \ 2p+1}$. Отсюда, учитывая равенство (3), имеем $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2p \ 2p+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} 2s \\ 2s \end{smallmatrix}\right) = \delta^s_p$.

Пусть $q \geq t+1$. Рассмотрим коэффициенты:

$$A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i_q \ 2q+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t \end{smallmatrix}\right), \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i_q \ 2q+1 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t+1 \end{smallmatrix}\right), \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2q \ i_q \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t \end{smallmatrix}\right), \quad A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2q \ i_q \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} j_t \\ 2t+1 \end{smallmatrix}\right).$$

Из условия $q \geq t+1$ имеем $2q+1-2t \geq 3$, поэтому $T^1_{2t\ 2q+1} = 0$. Тогда $A\begin{pmatrix}1 & \big| & j_t \\ i_q\ \ 2q+1 & \big| & 2t\end{pmatrix} = \delta^{j_t}_{2q+1} T^1_{i_q\ 2t}$. Так как $i_q \geq 2q+1$, то $i_q - 2t > 3$, значит, $T^1_{i_q\ 2t} = 0$. Отсюда $A\begin{pmatrix}1 & \big| & j_t \\ i_q\ \ 2q+1 & \big| & 2t\end{pmatrix} = 0$. Аналогично доказывается, что остальные коэффициенты также равны нулю.

Из полученных результатов следует, что матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} -E_{n-1} & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & E_{2(n-3)} & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{2(n-2r-1)} & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & E_r \end{pmatrix},$$

где E_m – единичная матрица порядка m. Отсюда $\rho(B) = n-1+r(2n-2r+3)$. Таким образом, имеет место

Теорема. *Если ранг некоторой из матриц* $T^i\ (i=1,2,..,n)$, *составленной из компонент тензора кручения связности* ∇, *имеет в точке* x_0 *ранг* $2r$, *то размерность группы движений пространства* $A_n = (M_n, \nabla)$ *не больше, чем*

$$n^2 - r(2n-2r-3)+1.$$

Указанная в теореме граница точная. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{R}^n$, на котором задана линейная связность ∇ следующими компонентами:

$$\Gamma^1_{2t\ 2t+1} = -\Gamma^1_{2t+1\ 2t} = \frac{1}{2} \qquad (t=1,2,..,r),$$

другие компоненты связности ∇ равны нулю. Группа G аффинных преобразований этого пространства является подгруппой обычной аффинной группы и имеет размерность $n^2 - r(2n-2r-3)+1$. При $r=1$ имеем $\dim G = n^2 - 2n + 6$.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности: Уч. зап. Казань, 1965. С. 5 – 179.

2. *Бурбаки Н.* Алгебра. Модули, кольца, формы. М., 1966.

3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 1.

A. Sultanov

ON THE SPACE MOTIONS GROUPS OF AFFINE CONNECTION WITH TORSION

Let $A_n = (M_n, \nabla)$ be a space of affine connection, T be a torsion field of ∇. We consider matrix $T^i = \left\| T^i_{\alpha\beta} \right\|, \alpha \neq i, \beta \neq i$ in coordinate neighborhood U with coordinate system $x^i\ (i=1,2,...,n)$. If $rank\left(T^i(x_0)\right) = 2r \neq 0, x_0 \in U$, for some index i, then $\dim G \leq n^2 - r(2n-2r-3)+1$, where G is the group of affine motions of A_n.